ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

5

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1884.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

ACTA MATHEMATICA, 5. 1884/1885.

INHALT. TABLE DES MATIÈRES.

BERICHTIGUNG.

Auf pag. 94 des fünften Bandes der Acta mathematica habe ich irrthümlich für die Vielfachheit der Ortscurve $\psi_1(h)$-ter Ordnung in den Puncten $A_1, \ldots, A_h$ die Zahl μ angenommen, während sie nur $\mu - h + 1$ beträgt. Die Differenzengleichung für $\varphi_2(h)$ muss heissen:

$$\varphi_2(h + 1) - \varphi_2(h) = (n - \mu - h)\psi_1(h) + h(\mu - h + 1).$$

Der begangene Fehler hat sich auf einige der nachfolgenden Formeln übertragen; insbesondere muss der für $[x_r]$ entwickelte Ausdruck um

$$\frac{1}{360} n(n^2 - 1)(n^2 - 4)(n - 3)$$

vermindert, und η um ebenso viel vermehrt werden.

Freiburg i/B., Mai 1884.

H. Krey.

SUR LA FORMULE

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \cdot \Delta u'_x + \frac{B_1 \cdot h^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta u^{IV}_x + \text{ etc.}$$

PAR

C. J. MALMSTEN

À UPSAL[1].

On sait que STIRLING, dans son ouvrage *Methodus Differentialis sive Tractatus de summatione serierum* résolut, il y a plus d'un siècle, une multitude de problèmes importants pour la théorie des séries infinies en général, et particulièrement pour les expressions de très grands nombres,

---

(1) Je crois devoir publier dans les Acta Mathematica le mémoire suivant de M. C. J. MALMSTEN, ancien professeur à l'académie d'Upsal.

Le mémoire en question a déjà été inséré dans CRELLES Journal für die reine und angewandte Mathematik, T. XXXV (1847), p. 55—82, mais avec de telles erreurs typographiques et d'autres plus graves encore au point de vue du texte comme à celui des formules, qu'il en est devenu presque illisible.

Ce mémoire doit être avec raison considéré comme une oeuvre capitale pour le sujet important qu'il traite, et voici entre autres le jugement de M. LIOUVILLE dans son Journal de Mathématiques, T. XVII, p. 448 et dans Comptes-Rendus, T. XXXV, p. 317. Ayant appelé l'attention sur la formule célèbre de STIRLING qui, tendant d'abord très rapidement vers la valeur demandée, devient ensuite divergente, M. LIOUVILLE dit d'un théorème remarquable, dont LEGENDRE avait acquis pour ainsi dire le sentiment par ses calculs numériques: »*Il est établi d'une manière très simple et très élégante dans un mémoire de M. Malmstén, que je me plais à citer comme remarquable à plus d'un titre*». Plus loin, en parlant de ses leçons au Collège de France, M. LIOUVILLE ajoute: »*J'ai présenté à mes auditeurs l'analyse de M. Malmstén .... dont je crois avoir simplifié quelques détails*».

J'ai cru par suite devoir réimprimer ici un remaniement dudit travail corrigé par

qui se présentent si fréquemment dans le calcul des probabilités et dont il serait presque impossible de trouver directement les valeurs numériques. Parmi toutes ces formules il y en a une qui a toujours attiré l'attention particulière des géomètres et qui est spécialement connue sous le nom de *formule de* STIRLING, à savoir celle qui sert à calculer par approximation le logarithme du produit d'un grand nombre de facteurs croissants en progression arithmétique. Cette série offre une singularité bien remarquable. Elle procède selon les puissances négatives d'un nombre très grand et, étant décroissante très rapidement, elle finit nécessairement par devenir divergente, quelque grand que soit le dit nombre.

Quant à la convergence ou la divergence des suites infinies, on sait que les analystes d'autrefois y attachaient beaucoup moins d'importance que ceux d'aujourd'hui; ils se servaient même très souvent dans leurs calculs de séries évidemment divergentes. Aujourd'hui bien s'en faut qu'on approuve l'usage de séries non convergentes; au contraire on veut qu'elles soient complètement bannies de l'analyse. Mais cette rigueur, juste et raisonnable en elle-même, a été mise à une bien dure épreuve par la série de STIRLING. D'une part divergente, comme elle l'est, elle *devait* en effet être rejetée: d'autre part, étant presqu'indispensable, elle *ne peut point* l'être. Cela étant, à moins de faire, à cause de la nécessité, une exception extraordinaire et non légitime pour cette série (ce que quelques-uns ont effectivement fait) il ne restait d'autre moyen que d'essayer de la rendre finie, c'est à dire, de chercher son terme complémentaire, ce à quoi on a aussi réussi. Nous rappellerons seulement ce que LIOUVILLE et CAUCHY ont fait à ce sujet.

La formule de STIRLING n'est cependant qu'un cas très particulier d'une formule qu'EULER a proposée le premier, mais qui est ordinairement attribuée à MACLAURIN[1] et connue sous son nom, savoir la formule

---

l'auteur lui-même, avec d'autant plus de raison que je crois savoir qu'il s'occupe d'un nouvel article traitant ce sujet, et où il cherche à donner aux formules une telle généralisation qu'elles puissent être appliquées aussi aux fonctions d'une variable complexe.

Le rédacteur.

[1] Le changement dans le texte est motivé par un intéressant petit mémoire de M. G. ENESTRÖM communiqué à l'Académie royale des Sciences de Stockholm le 15 Décembre 1879 (voir Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1879, N:o 10, p. 3—17: *Om upptäckten af den* EULER*'ska summationsformeln*).

$$(1) \qquad h\Sigma u = \int u dx - \frac{h}{2} \cdot u + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} \cdot u' - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot u''' + \text{ etc.},$$

où B_1, B_2, etc. désignent les nombres de BERNOULLI et u', u'', etc. la première, la seconde, etc. dérivée de u. Les nombres B_1, B_2, etc. sont, comme on le sait, tels que, dès le quatrième, ils vont toujours en croissant et finissent par devenir infiniment grands. Ainsi la convergence de la série (1) n'a pas généralement lieu; au contraire nous l'avons vu être divergente dans le cas particulier de la formule de STIRLING.

Cela posé, la série (1) présentant souvent la même singularité que celle de STIRLING, à savoir d'être d'abord rapidement décroissante et de finir par devenir divergente; les géomètres ont regardé comme très importante la légitimation générale de son emploi dans le calcul d'approximation. En effet ils ont tâché de fixer les limites du reste de la série, quand on arrête le calcul à un terme déterminé, c'est à dire, de fixer les limites du terme complémentaire. Le premier essai à cet égard que nous avons eu l'occasion de connaître est dû à ERCHINGER, et se trouve exposé par EYTELWEIN (1) et par v. ETTINGSHAUSEN (2). Mais son analyse n'est point satisfaisante, puisque l'équation différentielle (à l'aide de laquelle il trouve la valeur du reste) n'a lieu que dans le cas où la série infinie, d'où elle est dérivée, est convergente; ce qui en effet n'a pas généralement lieu.

Un autre calcul très ingénieux du terme complémentaire, dans le développement de $h\Sigma u$ entre des limites données, est dû à POISSON, qui l'a exposé dans un excellent mémoire: *Sur le calcul numérique des intégrales définies* (3). Il est fondé sur l'expression connue

$$f(x) = \frac{1}{2a} \cdot \int_{-a}^{+a} f(z) dz + \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} \left[\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \cos\left(\frac{i\pi(x-z)}{a}\right) \right] f(z) dz$$

(qui, comme on le sait, a lieu pour toutes les valeurs de x comprises

(1) *Grundlehren der höheren Analysis.* Berlin 1824, T. 2, § 696.

(2) *Vorlesungen über die höhere Mathematik.* Wien 1827, T. 1, p. 429.

(3) Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris 1826, T. VI, p. 571—602.

entre les limites des intégrales) et donne pour résultat la formule suivante:

$$h\sum_0^c f(x) = \int_0^c f(x)dx - \frac{1}{2}h\{f(c) - f(0)\} + A_1 h^2\{f'(c) - f'(0)\} - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(c) - f^{(2m-1)}(0)\} + R_m,$$

où

(2) $$\frac{1}{2}(2\pi)^{2m} A_m = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \text{ etc.}$$

$$R_m = (-1)^m \cdot 2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \cdot \int_0^c \left[\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^{2m}} \cdot \cos\frac{2i\pi x}{h}\right] f^{(2m)}(x)dx.$$

En mettant ici $x - x_0$ à la place de x et puis $f(x)$ à la place de $f(x - x_0)$ on obtiendra facilement, si l'on fait $c + x_0 = x_1$,

(3) $$h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{1}{2}h\{f(x_1) - f(x_0)\} + A_1 h^2\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} + R'_m,$$

où

$$R'_m = (-1)^m \cdot 2 \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \left[\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^{2m}} \cdot \cos\frac{2i\pi(x - x_0)}{h}\right] f^{(2m)}(x) \cdot dx.$$

Si l'on désigne par M_{2m} la plus grande valeur numérique de $f^{(2m)}(x)$ entre $x = x_0$ et $x = x_1$ on aura[1]

(4) $$|R'_m| = \theta h^{2m} A_m \cdot M_{2m} |(x_1 - x_0)| \qquad (0 < \theta < 1)$$

[1] Nous désignons, d'après M. WEIERSTRASS, la valeur numérique d'une quantité réelle Q par $|Q|$.

et, dans le cas où $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe dans toute cette étendue,

$$R'_m = (-1)^m \cdot 2 \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \cdot \{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{\cos p_i}{i^{2m}}$$

$$= (-1)^{m-1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \cdot \{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} \cdot \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} p_i - 1}{i^{2m}},$$

en posant

$$p_i = \frac{2i\pi\theta_1(x_1 - x_0)}{h}, \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

c'est à dire, à l'aide de (2),

$$(5) \quad R'_m = (-1)^{m-1} \cdot h^{2m} \{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} (2\theta_2 - 1) A_m, \quad (0 < \theta_2 < 1).$$

Nous aurons donc, *$f^{(2m)}(x)$ conservant le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$*,

$$h \sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - \frac{1}{2} h \cdot \{f(x_1) - f(x_0)\} + A_1 \cdot h^2 \{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \dots$$

$$(6) \qquad + (-1)^{m-2} A_{m-1} \cdot h^{2m-2} \{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\}$$

$$+ (-1)^{m-1} \theta_2 \cdot 2 A_m h^{2m} \{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}, \quad (0 < \theta_2 < 1).$$

On doit aussi à l'illustre auteur des *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* un excellent mémoire sur ce sujet savoir: *De usu legitimo formulæ summatoriæ Maclaurinianæ*[1], où il démontre que, les deux expressions

$$(7) \qquad \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x + z) \quad \text{et} \quad \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m+2)}(x + z)$$

---

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik v. CRELLE, T. XII, p. 263—272.

ne changeant pas de signe, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, et de plus étant toutes les deux du même signe, on aura

$$(S)\qquad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1)-f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1)-f'(x_0)\}$$

$$-\frac{B_2 . h^4}{1.2.3.4}\{f'''(x_1)-f'''(x_0)\} + \ldots + (-1)^m . \frac{B_{m-1} . h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\}$$

$$+ (-1)^{m+1} . \theta . \frac{B_m . h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\},$$

où $0 < \theta < 1$.

Si l'on compare le résultat auquel est arrivé Jacobi avec celui de Poisson, on voit sans difficulté que leurs recherches se complètent l'une l'autre d'une certaine façon. La déduction de Poisson exige que la dérivée $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$; mais, pour la dérivée paire suivante $f^{(2m+2)}(x)$, elle ne demande aucune détermination particulière. La déduction de Jacobi suppose — non pas que $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe entre $x = x_0$ et $x = x_1$ — mais seulement que

$$(S_a)\qquad \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z)$$

conserve le même signe entre $z = 0$ et $z = h$; mais elle demande en même temps, qu'entre les mêmes valeurs de z,

$$\sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m+2)}(x)$$

ait le même signe que (S_a).

Après cette exposition succincte des recherches antérieures sur ce sujet, il nous sera permis de dire un mot sur le présent mémoire. Nous le diviserons en trois sections. Dans la *première* nous nous occuperons de la recherche de quelques relations entre les nombres de Bernoulli, dont nous aurons besoin dans la suite: dans la *seconde* nous développerons les

théorèmes et les formules générales qui touchent de plus près à la formule remarquable, se trouvant en tête de ce mémoire: enfin dans la *troisième* nous ferons quelques applications importantes du dernier de ces théorèmes.

Nous n'ignorons pas que la formule d'EULER est ordinairement présentée sous la forme (1); mais nonobstant nous avons préféré pour nos recherches la forme

$$(9) \qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} . \Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1 . 2} . \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 . 2 . 3 . 4} . \Delta u^{IV}_x + \text{ etc.}$$

Au premier coup-d'oeil on trouvera cela peut-être de très peu d'importance; mais la forme n'est pas tout à fait sans conséquence dans les applications. En effet la formule (1) étant prise dans sa plus grande généralité, on ne peut parler d'un terme complémentaire, $h\Sigma u$ étant absolument indéterminée. Il faut donc ou fixer le terme Σu, en le considérant comme une sommation entre de certaines limites (ce qui est le cas ordinaire), ou le prendre pour une fonction déterminée de x, d'où l'on puisse ensuite déduire u et ses dérivées. Mais le procédé ordinaire a souvent des inconvénients par rapport à la continuité; ainsi p. ex. le développement de $\log \Gamma(x+1)$ qu'on trouve de cette manière n'est rigoureusement démontré que pour les valeurs *entières* de x. Nous avons donc préféré considérer Σu comme une fonction déterminée de x; et pour faire voir cela plus clairement, nous avons donné à la série dont il s'agit la forme (9).

Quant à la méthode d'opérer, nous prenons le même point de départ que JACOBI, savoir la formule connue

$$u_{x+h} = u_x + h . u'_x + \frac{h^2}{1 . 2} . u''_x + \ldots + \frac{h^r}{1 . 2 \ldots r} . u^{(r)}_x + \int_0^h \frac{(h-z)^r}{1 . 2 \ldots r} . u^{(r+1)}_{x+z}\, dz;$$

mais le reste de nos déductions sera tout à fait différent des siennes. En effet les recherches de cet illustre analyste font fort bien connaître que la fonction que nous avons désignée par $\varphi(z)$ (voir la formule (25)) conserve toujours le même signe entre $z = 0$ et $z = h$; mais elles ne font pas voir la propriété la plus remarquable de cette fonction, savoir *qu'elle*

a entre ces limites son seul maximum ou minimum en $z = \frac{h}{2}$, *et qu'elle est parfaitement symétrique de l'un et de l'autre côté de ce point.* Cette propriété est un point essentiel pour nos déductions; c'est par elle que nous sommes parvenus à trouver les limites du terme complémentaire pour le cas même qui a échappé aux recherches de Jacobi, c'est à dire pour le cas où les expressions (7) n'ont pas le même signe.

Relations entre les nombres de Bernoulli.

§ 1.

Si dans la formule connue

$$(10) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{e^{2\pi x} - 1} \, . \, dx = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \operatorname{cotang} \frac{1}{2}\omega$$

on met à la place du membre à droite sa valeur

$$(11) \quad \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \operatorname{cotang} \frac{1}{2}\omega = B_1 . \frac{\omega}{1 . 2} + B_2 . \frac{\omega^3}{1 . 2 . 3 . 4} + \ldots + B_m . \frac{\omega^{2m-1}}{1 . 2 \ldots 2m} + \text{ etc.}$$

(où $B_1, B_2, \ldots, B_m$ etc. sont les nombres de Bernoulli), on aura, en posant $\omega = 0$, après avoir différentié $2m - 1$ fois par rapport à cette variable,

$$(12) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{2m-1} . dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{B_m}{4m} .$$

Or la formule (10), multipliée par $\cos \omega$, donne

$$(13) \qquad 2 . \int_0^\infty \frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{e^{2\pi x} - 1} . \cos \omega \, . \, dx = \varphi_1(\omega),$$

en supposant pour abréger

$$\varphi_1(\omega) = 2.\cos\omega\left\{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2}.\mathrm{cotang}\,\frac{1}{2}\omega\right\} = \frac{2\cos\omega}{\omega} - \mathrm{cotang}\,\frac{1}{2}\omega + \sin\omega,$$

c'est à dire, en vertu de (11),

$$(14)\qquad \varphi_1(\omega) = B_1\omega + \frac{\omega^3}{1.2.3}\left(\frac{B_2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\omega^5}{1.2\ldots5}\left(\frac{B_3}{3} + \frac{2}{3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\omega^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}\left(\frac{B_m}{m} + (-1)^{m-1}.\frac{m-1}{m}\right) + \text{ etc.}$$

Différentions maintenant $2m - 1$ fois la formule (13). Pour cela nous nous servirons de la formule connue

$$(15)\qquad \frac{d^n(e^{ny}.\cos my)}{dy^n} = \frac{1}{2}\left\{e^{y(n+m\sqrt{-1})}(n + m\sqrt{-1})^n + e^{y(n-m\sqrt{-1})}(n - m\sqrt{-1})^n\right\},$$

qui, toutes réductions faites, donnera pour $\omega = 0$

$$(16)\qquad \frac{d^{(2m-1)}_{(\omega=0)}\left\{(e^{\omega x} - e^{-\omega x})\cos\omega\right\}}{(d\omega)^{2m-1}} = (-1)^{m-1}.\frac{(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1} - (1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}.$$

Donc on tire de (13)

$$(17)\qquad \int_0^\infty \frac{(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1} - (1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{2\,dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{m-1}{m} + (-1)^{m-1}.\frac{B_m}{m},$$

parce qu'en vertu de (14) on a

$$\frac{d^{(2m-1)}_{(\omega=0)}\varphi_1(\omega)}{(d\omega)^{2m-1}} = \frac{B_m}{m} + (-1)^{m-1}.\frac{m-1}{m}.$$

En développant les puissances sous le signe $\int$ dans (17), et en désignant

par $(2m-1)_1$, $(2m-1)_3$, etc. le premier, le troisième etc. coëfficient du binome pour l'exposant $2m-1$, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{4\,dx}{e^{2\pi x}-1}\cdot\left|\begin{array}{l}(2m-1)_1.x-(2m-1)_3.x^3+\ldots\\ +(-1)^{m-2}.(2m-1)_{2m-3}.x^{2m-3}+(-1)^{m-1}.x^{2m-1}\end{array}\right|$$

$$=\frac{m-1}{m}+(-1)^{m-1}.\frac{B_m}{m},$$

et de là, à l'aide de (12), on tire la relation suivante entre les nombres de Bernoulli:

$$(18)\qquad (2m-1)_1.B_1-\frac{1}{2}.(2m-1)_3.B_2+\frac{1}{3}.(2m-1)_5.B_3-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^m.\frac{1}{m-1}.(2m-1)_{2m-3}.B_{m-1}=\frac{m-1}{m}.$$

§ 2.

Mettons dans (10) et (12) $\frac{1}{2}x$ à la place de x et dans (10) 2ω à la place de ω; nous aurons

$$(19)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2m-1}.\,dx}{e^{\pi x}-1}=\frac{2^{2m-1}.\,B_m}{2m},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega x}-e^{-\omega x}}{e^{\pi x}-1}.dx=\frac{1}{\omega}-\operatorname{cotang}\omega.$$

La dernière formule, multipliée par $\cos\omega$, donnera

$$\int_0^\infty \frac{(e^{\omega x} - e^{-\omega x})\cos\omega}{e^{\pi x} - 1} . dx = \sin\omega + \frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{1}{\sin\omega},$$

d'où, en posant $\omega = 0$, après avoir différentié $2m - 1$ fois par rapport à cette variable, on obtiendra en vertu de (16)

$$(-1)^{m-1} . \int_0^\infty \frac{(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1} - (1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}} . \frac{dx}{e^{\pi x} - 1}$$

$$= \frac{d^{(2m-1)}_{(\omega=0)} \left\{ \sin\omega + \frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{1}{\sin\omega} \right\}}{(d\omega)^{2m-1}} .$$

Mais comme

$$\sin\omega + \frac{\cos\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{1.2} - 3 . \frac{\omega^3}{1...4} + 5 . \frac{\omega^5}{1...6} - ... + (-1)^{m-1} . (2m - 1) . \frac{\omega^{2m-1}}{1...2m} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{\sin\omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{2(2 - 1) . B_1 . \omega}{1.2} + \frac{2(2^3 - 1) . B_2 . \omega^3}{1.2...4} + ... + \frac{2(2^{2m-1} - 1) B_m . \omega^{2m-1}}{1.2...2m} + \text{ etc.},$$

on aura

$$\frac{d^{(2m-1)}_{(\omega=0)} \left\{ \sin\omega + \frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{1}{\sin\omega} \right\}}{(d\omega)^{2m-1}} = -\frac{1}{2m} \{ 2(2^{2m-1} - 1) B_m + (-1)^m . (2m - 1) \},$$

d'où enfin on obtiendra

$$\int_0^\infty \frac{(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1} - (1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}} . \frac{dx}{e^{\pi x} - 1}$$

$$= \frac{2m - 1}{2m} + (-1)^m . \frac{2(2^{2m-1} - 1) . B_m}{2m} .$$

En développant $(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1}$ et $(1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}$ et en faisant les intégrations à l'aide de (19), on aura

$$(20)\quad \frac{(2m-1)_1 \cdot 2^2 \cdot B_1}{2} - \frac{(2m-1)_3 \cdot 2^4 \cdot B_2}{4} + \ldots + (-1)^{m-2} \cdot \frac{(2m-1)_{2m-3} \cdot 2^{2m-2} \cdot B_{m-1}}{2m-2}$$

$$+ (-1)^{m-1} \cdot \frac{2^{2m} \cdot B_m}{2m} = \frac{2m-1}{2m} + (-1)^m \cdot \frac{2(2^{2m-1}-1) \cdot B_m}{2m},$$

d'où l'on tirera facilement

$$\frac{1}{2m} - 1 + \frac{(2m-1)_1 \cdot 2^2 \cdot B_1}{2} - \frac{(2m-1)_3 \cdot 2^4 \cdot B_2}{4} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m \cdot \frac{(2m-1)_{2m-3} \cdot 2^{2m-2} \cdot B_{m-1}}{2m-2} = (-1)^m \cdot \frac{2(2^{2m}-1) \cdot B_m}{2m},$$

et enfin, en multipliant chaque terme par $\frac{1}{\Gamma(2m)} \cdot \frac{1}{2^{2m}}$,

$$(21)\quad \frac{1}{1\ldots 2m} \cdot \frac{1}{2^{2m}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1\ldots(2m-1)} \cdot \frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1\ldots(2m-2)} \cdot \frac{1}{2^{2m-2}}$$

$$- \frac{B_2}{1\ldots 4} \cdot \frac{1}{1\ldots(2m-4)} \cdot \frac{1}{2^{2m-4}} + \ldots + (-1)^m \frac{B_{m-1}}{1\ldots(2m-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$= (-1)^m \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{1\ldots 2m}.$$

Théorèmes et formules générales.

§ 3.

Les deux relations entre les nombres de Bernoulli dont nous aurons besoin dans la suite, ayant été trouvées dans (18) et (21), nous passons maintenant à ce qu'il y a de plus essentiel dans ce mémoire. Soit u_x

une fonction de x qui, avec ses $2m+1$ premières dérivées, est continue depuis x jusqu'à $x+h$; faisons pour abréger

$$(22)\qquad F(x,\,h) = hu'_x - \Delta u_x - H_1.h.\Delta u'_x - H_2.h^2.\Delta u''_x - \dots$$
$$\dots - H_{2m-2}.h^{2m-2}.\Delta u_x^{(2m-2)} - H_{2m-1}h^{2m-1}\Delta u_x^{(2m-1)},$$

où u'_x, u''_x etc. sont les dérivées successives de u_x. En vertu d'un théorème connu nous aurons

$$\Delta u_x = hu'_x + \frac{h^2}{1.2}.u''_x + \frac{h^3}{1.2.3}.u'''_x + \dots + \frac{h^{2m}}{1\dots 2m}.u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m}}{1\dots 2m}.u_{x+z}^{(2m+1)}.dz,$$

$$\Delta u'_x = h.u''_x + \frac{h^2}{1.2}.u'''_x + \dots + \frac{h^{2m-1}}{1\dots(2m-1)}.u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m-1}}{1\dots(2m-1)}.u_{x+z}^{(2m+1)}.dz.$$

$$\Delta u''_x = h.u'''_x + \dots + \frac{h^{2m-2}}{1\dots(2m-2)}.u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m-2}}{1\dots(2m-2)}.u_{x+z}^{(2m+1)}.dz,$$

. . . .

$$\Delta u_x^{(2m-1)} = h.u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)}{1}.u_{x+z}^{(2m+1)}.dz.$$

Ces valeurs, substituées dans (22), donnent

$$(23)\quad F(x,\,h) = -\int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}.dz\left\{\frac{\overline{h-z}^{\,2m}}{1\dots 2m} + \frac{H_1.h(h-z)^{2m-1}}{1.2\dots(2m-1)} + \frac{H_2.h^2(h-z)^{2m-2}}{1\dots(2m-2)} + \dots\right.$$
$$\left.\dots + \frac{H_{2m-2}.h^{2m-2}(h-z)^2}{1.2} + \frac{H_{2m-1}.h^{2m-1}.(h-z)}{1}\right\}$$

où les coëfficients $H_1, H_2, \ldots, H_{2m-1}$ sont déterminés par

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
& H_1 + \frac{1}{1.2} = 0, \\
& H_2 + \frac{H_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0, \\
& H_3 + \frac{H_2}{1.2} + \frac{H_1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& H_{2m-2} + \frac{H_{2m-3}}{1.2} + \frac{H_{2m-4}}{1.2.3} + \ldots + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_1}{1.2\ldots(2m-2)} \\
& \qquad\qquad + \frac{1}{1.2\ldots(2m-1)} = 0, \\
& H_{2m-1} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{H_{2m-3}}{1.2.3} + \ldots + \frac{H_3}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-2)} \\
& \qquad\qquad + \frac{H_1}{1.2\ldots(2m-1)} + \frac{1}{1.2\ldots 2m} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 4.

Considérons en premier lieu le polynome entre les crochets dans (23) et posons

$$
(25)\quad \varphi(h-z) = \frac{(h-z)^{2m}}{1.2\ldots 2m} + \frac{H_1 . h(h-z)^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)} + \frac{H_2 . h^2(h-z)^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)} + \frac{H_4 . h^4 . (h-z)^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-4)} + \ldots + \frac{H_{2m-2} . h^{2m-2} . (h-z)^2}{1.2},
$$

$$
(26)\quad \psi(h-z) = \frac{H_3 . h^3 . (h-z)^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_5 . h^5 . (h-z)^{2m-5}}{1.2\ldots(2m-5)} + \ldots + \frac{H_{2m-1} . h^{2m-1} . (h-z)}{1},
$$

qui, au lieu de (23), donne cette expression plus abrégée

$$(27)\qquad F(x,\ h) = -\int_0^h [\varphi(h-z) + \psi(h-z)] . u_{x+z}^{(2m+1)} . dz.$$

En développant $\varphi(h-z) + \psi(h-z)$ selon les puissances de z, nous aurons

$$\varphi(h-z) + \psi(h-z) =$$

$$h^{2m}\left\{\frac{1}{1.2\ldots 2m} + \frac{H_1}{1.2\ldots(2m-1)} + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-2)} + \ldots + \frac{H_{2m-3}}{1.2.3} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{H_{2m-1}}{1}\right\}$$

$$-\frac{h^{2m-1}.z}{1}\left\{\frac{1}{1.2\ldots(2m-1)} + \frac{H_1}{1.2\ldots(2m-2)} + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-3)} + \ldots + \frac{H_{2m-3}}{1.2} + \frac{H_{2m-2}}{1} + H_{2m-1}\right\}$$

$$+\frac{h^{2m-2}.z^2}{1.2}\left\{\frac{1}{1.2\ldots(2m-2)} + \frac{H_1}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-4)} + \ldots + \frac{H_{2m-4}}{1.2} + \frac{H_{2m-3}}{1} + H_{2m-2}\right\}$$

$$-\frac{h^{2m-3}.z^3}{1.2.3}\left\{\frac{1}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_1}{1.2\ldots(2m-4)} + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-5)} + \ldots + \frac{H_{2m-5}}{1.2} + \frac{H_{2m-4}}{1} + H_{2m-3}\right\}$$

. . . .

$$-\frac{h^3.z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)}\left\{\frac{1}{1.2.3} + \frac{H_1}{1.2} + \frac{H_2}{1} + H_3\right\}$$

$$+\frac{h^2.z^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}\left\{\frac{1}{1.2} + \frac{H_1}{1} + H_2\right\}$$

$$-\frac{h.z^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}\left\{1 + H_1\right\}$$

$$+\frac{z^{2m}}{1.2\ldots 2m},$$

c'est à dire, en faisant attention aux expressions (24),

$$\varphi(h-z)+\psi(h-z)=\frac{z^{2m}}{1.2\ldots 2m}+\frac{H_1.h.z^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}+\frac{H_2.h^2.z^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}+\ldots+\frac{H_{2m-2}.h^{2m-2}.z^2}{1.2}-$$

$$-\left\{\frac{H_3.h^3.z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)}+\frac{H_5.h^5.z^{2m-5}}{1.2\ldots(2m-5)}+\ldots+\frac{H_{2m-1}.h^{2m-1}.z}{1}\right\}$$

ou enfin

$$(28)\qquad \varphi(h-z)+\psi(h-z)=\varphi(z)-\psi(z).$$

En supposant ici $z=\frac{1}{2}h$, on aura

$$\psi\left(\frac{1}{2}h\right)=0,$$

ce qui ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs entières de m, à moins que les coëfficients des termes différents dans $\psi(h-z)$ [1] ne soient séparément égaux à zéro; c'est à dire que

$$(28\text{a})\qquad H_3=H_5=H_7=\ldots=H_{2m-1}=0.$$

Nous aurons donc au lieu de (27) et (28)

$$(29)\qquad F(x,\,h)=-\int_0^h\varphi(h-z).u_{x+z}^{(2m+1)}.dz,$$

$$(30)\qquad \varphi(h-z)=\varphi(z).$$

§ 5.

Quant aux coëfficients H_1, H_2, H_4 etc., on obtient immédiatement

$$H_1=-\frac{1}{2};$$

[1] Voir la formule (26).

par conséquent, à l'aide de (28_a), la dernière des relations (24) peut être présentée sous la forme

$$(31)\qquad \frac{m-1}{1.2\ldots 2m} = \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-2)} + \frac{H_4}{1.2\ldots(2m-4)} + \ldots + \frac{H_{2m-4}}{1.2.3.4} + \frac{H_{2m-2}}{1.2},$$

d'où, en multipliant par $2.\Gamma(2m)$ et en supposant généralement

$$(32)\qquad H_{2r} = (-1)^{r+1}.\frac{K_r}{1.2\ldots 2r},$$

on obtiendra la formule

$$\frac{m-1}{m} = (2m-1)_1.K_1 - \frac{1}{2}(2m-1)_3.K_2 + \frac{1}{3}(2m-1)_5.K_3 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m-1}.\frac{1}{m-2}.(2m-1)_{2m-5}.K_{m-2} + (-1)^m.\frac{1}{m-1}.(2m-1)_{2m-3}.K_{m-1},$$

en vertu de laquelle (comparée à (18)) il faut nécessairement que

$$K_r = B_r,$$

et ensuite

$$(33)\qquad H_{2r} = (-1)^{r+1}.\frac{B_r}{1.2\ldots 2r},$$

en désignant par B_r le r-ième nombre de Bernoulli.

§ 6.

Ayant trouvé les valeurs de tous les coëfficients H, il nous reste à donner une relation entre eux, dont nous aurons besoin tout à l'heure

et qui se trouvera facilement à l'aide de (30). En effet, cette formule donne immédiatement

$$(33_a)\qquad \int_0^h \varphi(z)\,dz = 2\,.\int_0^{\frac{1}{2}h} \varphi(z)\,dz,$$

d'où, en faisant les intégrations, on aura, après avoir divisé par h^{2m+1},

$$\frac{1}{1.2\ldots(2m+1)} + \frac{H_1}{1.2\ldots 2m} + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-1)} + \ldots + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots(2m+1)}\cdot\frac{1}{2^{2m}} + \frac{H_1}{1.2\ldots 2m}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-1)}\cdot\frac{1}{2^{2m-2}} + \ldots + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2},$$

et ensuite, en vertu des relations (24), en tenant compte de (28_a),

$$(34)\quad -H_{2m} = \frac{1}{1.2\ldots(2m+1)}\cdot\frac{1}{2^{2m}} + \frac{H_1}{1.2\ldots 2m}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{H_2}{1.2\ldots(2m-1)}\cdot\frac{1}{2^{2m-2}}$$

$$+ \frac{H_4}{1.2\ldots(2m-3)}\cdot\frac{1}{2^{2m-4}} + \ldots + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2}.$$

§ 7.

Nous nous occuperons maintenant de quelques propriétés remarquables de la fonction $\varphi(z)$, et nous démontrerons en premier lieu

qu'elle ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = h$, et qu'elle est positive dans cette étendue, si m est pair, et négative, si m est impair.

Pour cela nous observerons, qu'en vertu de la valeur $H_1 = -\frac{1}{2}$, l'expression

$$z + H_1 h$$

est *négative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}.h$; en multipliant par $h^{-4}.dh$ et en intégrant entre $h = h$ et $h = \infty$, nous aurons

$$\int_h^\infty (z.h^{-4} + H_1.h^{-3})dh = \frac{z.h^{-3}}{3} + \frac{H_1.h^{-2}}{2}.$$

Cette expression étant *négative* entre les mêmes limites de z, il faut nécessairement que

$$\frac{z}{3} + \frac{H_1.h}{2}$$

et par conséquent

$$\int_z^{\frac{1}{2}h} \left(\frac{z}{3} + \frac{H_1.h}{2}\right)dz = -\left\{\frac{z^2}{1.2.3} + \frac{H_1.h.z}{1.2} + H_2.h^2\right\}$$

le soit aussi; d'où, en multipliant par $-z$, nous aurons l'expression

(35) $$\frac{z^3}{1.2.3} + \frac{H_1.h.z^2}{1.2} + H_2.h^2.z,$$

qui est *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}.h$. Multiplions (35) par $h^{-6}.dh$ et intégrons entre $h = h$ et $h = \infty$, nous aurons

$$\frac{h^{-5}.z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_1.h^{-4}.z^2}{1.2.4} + \frac{H_2.h^{-3}.z}{3}.$$

Cette expression, et par conséquent aussi celle de

$$\frac{z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_1.h.z^2}{1.2.4} + \frac{H_2.h^2.z}{3},$$

doit être *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2} . h$, et de même(¹)

$$\int_z^{\frac{1}{2}h} \left(\frac{z^3}{1 . 2 . 3 . 5} + \frac{H_1 . h . z^2}{1 . 2 . 4} + \frac{H_2 . h^2 . z}{3} \right) dz,$$

$$= - \left\{ \frac{z^4}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} + \frac{H_1 . h . z^3}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{H_2 . h^2 . z^2}{1 . 2 . 3} + H_4 . h^4 \right\}$$

d'où, en multipliant par $- z$, il s'ensuit que l'expression

$$(36) \qquad \frac{z^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} + \frac{H_1 . h . z^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{H_2 . h^2 . z^3}{1 . 2 . 3} + H_4 . h^4$$

doit être *négative* depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{2} h$. Il suffira donc, pour faire voir ce qui a lieu en général, de démontrer que, si l'expression

$$(37) \qquad \frac{z^{2m-3}}{1 . 2 \ldots (2m-3)} + \frac{H_1 . h . z^{2m-4}}{1 . 2 \ldots (2m-4)} + \frac{H_2 . h^2 . z^{2m-5}}{1 . 2 \ldots (2m-5)} + \frac{H_4 . h^4 . z^{2m-7}}{1 . 2 \ldots (2m-7)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{H_{2m-6} . h^{2m-6} . z^3}{1 . 2 . 3} + H_{2m-4} . h^{2m-4} . z$$

est toujours *positive* ou toujours *négative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2} . h$, celle de

$$(38) \qquad \frac{z^{2m-1}}{1 . 2 \ldots (2m-1)} + \frac{H_1 . h . z^{2m-2}}{1 . 2 \ldots (2m-2)} + \frac{H_2 . h^2 . z^{2m-3}}{1 . 2 \ldots (2m-3)} + \frac{H_4 . h^4 . z^{2m-5}}{1 . 2 \ldots (2m-5)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{H_{2m-4} . h^{2m-4} . z^3}{1 . 2 . 3} + H_{2m-2} . h^{2m-2} . z$$

sera toujours *négative* ou toujours *positive* entre les mêmes limites de z.

(¹) Voir la formule (34).

En effet, multiplions (37) par $h^{-2m}.dh$ et intégrons entre $h=h$ et $h=\infty$; il faut que l'intégrale

$$\frac{z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)}\cdot\frac{h^{-2m+1}}{2m-1}+\frac{H_1.z^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-4)}\cdot\frac{h^{-2m+2}}{2m-2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{H_{2m-6}.z^3}{1.2.3}\cdot\frac{h^{-5}}{5}+\frac{H_{2m-4}.z}{1}\cdot\frac{h^{-3}}{3},$$

et par conséquent l'expression

$$\frac{z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)}\cdot\frac{1}{2m-1}+\frac{H_1 z^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-4)}\cdot\frac{h}{2m-2}+\frac{H_2 z^{2m-5}}{1.2\ldots(2m-5)}\cdot\frac{h^2}{2m-3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{H_{2m-6}.z^3}{1.2.3}\cdot\frac{h^{2m-6}}{5}+\frac{H_{2m-4}.z}{1}\cdot\frac{h^{2m-4}}{3},$$

soit *positive* ou *négative* entre $z=0$ et $z=\frac{1}{2}h$. Multipliant la dernière expression par dz et intégrant entre $z=z$ et $z=\frac{1}{2}h$, l'intégrale

$$-\left\{\frac{z^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-1)}+\frac{H_1 hz^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-2)}+\frac{H_2 h^2 z^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-3)}+\frac{H_4 h^4 z^{2m-6}}{1.2\ldots(2m-5)}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{H_{2m-4}h^{2m-4}.z^2}{1.2.3}+H_{2m-2}.h^{2m-2}\right\}$$

doit de même être toujours *positive* ou toujours *négative* entre les mêmes limites de z; d'où, en multipliant par $-z$, il suit que l'expression (38), qui n'est autre chose que la dérivée $\varphi'(z)$, est toujours *négative* ou toujours *positive* entre $z=0$ et $z=\frac{1}{2}h$.

Par ce qui précède[1] il est donc démontré que $\varphi'(z)$, fonction

[1] Dans les formules (35) et (36) nous avons trouvé la fonction $\varphi'(z)$ *positive* pour $m=2$ et *négative* pour $m=3$.

entière du $(2m - 1)^{\text{ème}}$ degré, est *positive* dans l'étendue indiquée, si m est pair, et *négative*, si m est impair. De là il suit immédiatement que l'expression

$$\int_0^z \varphi'(z)dz = \varphi(z)$$

ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$, étant positive dans cette étendue, si m est pair, et négative, si m est impair.

Il suffira donc de se rappeler la relation trouvée ci-dessus

(39) $$\varphi(z) = \varphi(h - z)$$

pour avoir démontré ce dont il s'agissait, à savoir que

la fonction $\varphi(z)$, ne changeant pas de signe entre $z = 0$ et $z = h$, est positive dans cette étendue, si m est pair, et négative, si m est impair.

§ 8.

En différentiant (39) par rapport à z, on aura

$$\varphi'(z) = -\varphi'(h - z),$$

ce qui exige nécessairement

$$\varphi'(z) = 0 \text{ pour } z = \frac{1}{2}h.$$

Donc, la fonction $\varphi'(z)$ qui, en vertu de ce qui précède, conserve toujours le même signe entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$, s'évanouit pour $z = \frac{1}{2}h$; elle passe dans ce point du *positif* au *négatif* (m étant pair) ou du *négatif* au *positif* (m étant impair), et conserve ensuite le même signe depuis $z = \frac{1}{2}h$ jusqu'à

$z = h$. Il s'ensuit que la fonction primitive $\varphi(z)$ va toujours en augmentant (si m est pair) ou en diminuant (m étant impair) depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{2}h$, et qu'après cela elle décroît ou augmente continuellement jusqu'à $z = h$; c'est à dire que

$\varphi(z)$ a, entre $z = 0$ et $z = h$, un seul maximum pour $z = \frac{1}{2}h$, si m est pair, et un seul minimum pour la même valeur $z = \frac{1}{2}h$, si m est impair.

§ 9.

Nous reprenons maintenant la formule (22), qui peut être présentée sous la forme

$$(40) \qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{1}{2}h\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta u^{\mathrm{IV}}_x + \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m \cdot B_{m-1} h^{2m-2}}{1 \cdot 2 \dots (2m-2)} + R,$$

où

$$(41) \qquad R = -\int_0^h u^{(2m+1)}_{x+z} \cdot \varphi(z)\,dz,$$

et par conséquent, $\varphi(z)$ conservant le même signe entre les limites de l'intégrale,

$$R = -u^{(2m+1)}_{x+\theta z} \cdot \int_0^h \varphi(z)\,dz,$$

c'est à dire, en vertu des formules (25), (33_a), (34) et (33),

$$(42) \qquad R = H_{2m} \cdot h^{2m+1} \cdot u^{(2m+1)}_{x+\theta h} = (-1)^{m+1} \cdot \frac{B_m h^{2m+1}}{1 \cdot 2 \dots 2m} \cdot u^{(2m+1)}_{x+\theta h}.$$

Cette valeur de R, substituée dans (40), nous donnera ce

Théorème I. *Soit u_x une fonction quelconque de x qui, de même que ses $2m+1$ premières dérivées, est continue entre x et $x+h$; la valeur de R dans la formule* (40) *sera égale à*

$$(-1)^{m+1}\frac{B_m \cdot h^{2m+1}}{1 \cdot 2 \ldots 2m}$$

multiplié par une valeur intermédiaire de la $(2m+1)^{\text{ième}}$ *dérivée; c'est à dire, on aura*

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2}\cdot\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\cdot\Delta u^{\text{IV}}_x + \ldots \tag{43}$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m \cdot B_{m-1} h^{2m-2}}{1 \cdot 2 \ldots (2m-2)}\cdot\Delta u^{(2m-2)}_x + \frac{(-1)^{m+1}\cdot B_m h^{2m+1}}{1 \cdot 2 \ldots 2m}\cdot u^{(2m+1)}_{x+\theta h},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Ce théorème est absolument général, ne supposant que la continuité de la fonction u_x et celle de ses $2m+1$ premières dérivées.

En faisant dans la formule (40) $x = x_1$ et ensuite $x = x_0$, on aura par soustraction

$$h(u'_{x_1} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\{\Delta u'_{x_1} - \Delta u'_{x_0}\} + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2}\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\} - \ldots \tag{44}$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m \cdot B_{m-1} h^{2m-2}}{1 \cdot 2 \ldots (2m-2)}\{\Delta u^{(2m-2)}_{x_1} - \Delta u^{(2m-2)}_{x_0}\} - \int_0^h \varphi(z)\,dz\,.\{u^{(2m+1)}_{x_1+z} - u^{(2m+1)}_{x_0+z}\}.$$

De là, $\varphi(z)$ conservant le même signe entre les limites de l'intégrale, on obtiendra, comme ci-dessus,

$$h(u'_{x_1} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\{\Delta u'_{x_1} - \Delta u'_{x_0}\} + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2}\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\} - \ldots \tag{45}$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m \cdot B_{m-1} h^{(2m-2)}}{1 \cdot 2 \ldots (2m-2)}\{\Delta u^{(2m-2)}_{x_1} - \Delta u^{(2m-2)}_{x_0}\} + \frac{(-1)^{m+1}\cdot B_m h^{2m+1}}{1 \cdot 2 \ldots 2m}\{u^{(2m+1)}_{x_1+\theta h} - u^{(2m+1)}_{x_0+\theta h}\}.$$

Supposons ici ([1])

(46) $$u'_{x_1+z} - u'_{x_0+z} = \sum_{x_0}^{x_1} f(x+z),$$

d'où ([2])

$$\Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx,$$

([1]) De même que cela a lieu en général pour les intégrales définies nous employons partout dans ce mémoire le signe

$$\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} \sum f(x).$$

([2]) En supposant $\frac{dF(x+z)}{dz} = \frac{dF(x+z)}{dx} = f(x+z)$ on aura en général

$$\int_z^{z+h} f(x+z)dz = \int_x^{x+h} f(x+z)dx = \Delta F(x+z),$$

et

(a) $$\int_{x_0}^{x_1} f(x+z)dx = F(x_1+z) - F(x_0+z) = \Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} F(x+z).$$

Or, en mettant

$$u'_{x_1+z} - u'_{x_0+z} = \sum_{x_0}^{x_1} f(x+z) = \Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} \sum f(x+z),$$

on aura, l'intégration faite entre z et $z+h$,

$$\Delta u_{x_1+z} - \Delta u_{x_0+z} = \Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} \sum \int^{z+h} f(x+z)dz = \Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} \sum \Delta F(x+z)$$

$$= \Bigg|_{x=x_0}^{x=x_1} F(x+z)dz,$$

c'est à dire, à l'aide de (a)

(b) $$\Delta u_{x_1+z} - \Delta u_{x_0+z} = \int_{x_0}^{x_1} f(x+z)dx.$$

et en général

$$\Delta u_{x_1}^{(r)} - \Delta u_{x_0}^{(r)} = f^{(r-1)}(x_1) - f^{(r-1)}(x_0),$$

nous aurons la formule

$$(47) \quad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^m . B_{m-1} h^{2m-2}}{1\,.\,2\dots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\} + \frac{(-1)^{m+1} . B_m h^{2m+1}}{1\,.\,2\dots 2m} . \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+\theta h),$$

qui n'exige pas nécessairement que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de h.

Dans le cas $x_1 - x_0 = nh$, en désignant par M_{2m} la plus grande *valeur numérique* de $f^{(2m)}(x)$ depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$, nous aurons, abstraction faite du signe,

$$\left|\sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+\theta h)\right| < \left|\frac{x_1 - x_0}{h}\right| . M_{2m},$$

et partant

$$(48) \quad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^m . B_{m-1} h^{2m-2}}{1\,.\,2\dots 2m-2}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\} + \theta . \frac{B_m h^{2m}}{1\,.\,2\dots 2m} . (x_1 - x_0) M_{2m}.$$

En comparant cette formule (48) aux formules (3) et (4), on voit que, pour obtenir, par développement en série, une valeur approximative de

---

En différentiant r fois par rapport à z, étant en général

$$\frac{d^k f(x+z)}{dz^k} = \frac{d^k f(x+z)}{dx^k},$$

on aura enfin

$$(c) \quad \Delta u_{x_1+z}^{(r)} - \Delta u_{x_0+z}^{(r)} = f^{(r-1)}(x_1+z) - f^{(r-1)}(x_0+z).$$

$\sum_{x_0}^{x_1} f(x)$ dont la différence de la vraie valeur de $\sum_{x_0}^{x_1} f(x)$ est numériquement $< s$, il suffira en effet de calculer *un* terme de moins de la série en question que n'en exigent les formules de Poisson.

§ 10.

En supposant maintenant dans (40) et (41) que $u_{x+z}^{(2m+1)}$ ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = h$, nous aurons

$$R = -\varphi(\theta h) . \Delta u_x^{(2m)}.$$

Comme $\varphi(z)$ conserve le même signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, de sorte que sa plus grande valeur numérique soit $\varphi\left(\frac{1}{2}h\right)$, et sa moindre valeur zéro, nous aurons

$$R = -\theta . \varphi\left(\frac{1}{2}h\right) . \Delta u_x^{(2m)}. \qquad (0 < \theta < 1)$$

Quant à $\varphi\left(\frac{1}{2}h\right)$, on en obtiendra facilement la valeur à l'aide de (25) et (21), à savoir

$$\varphi\left(\frac{1}{2}h\right) = (-1)^m . \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{B_m h^{2m}}{1 \cdot 2 \ldots 2m}, \tag{49}$$

d'où enfin

$$R = (-1)^{m+1} . \theta . \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{B_m h^{2m}}{1 \cdot 2 \ldots 2m} . \Delta u_x^{(2m)}. \tag{50}$$

Nous aurons donc le théorème suivant:

Théorème II. *Soit u_x une fonction quelconque de x, continue de même que ses $2m+1$ premières dérivées depuis x jusqu'à $x+h$; soit*

de plus la $(2m+1)^{\text{ième}}$ *dérivée toujours du même signe entre ces limites; la valeur de R dans la formule* (40) *sera*

$$R = (-1)^{m+1}.\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)};$$

et partant nous aurons

$$(51)\qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}.\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}.\Delta u_x^{\text{IV}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}.\Delta u_x^{(2m-2)} + (-1)^{m+1}.\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)},$$

$$0 < \theta < 1.$$

De même, en supposant dans (44) que

$$u_{x_1+z}^{(2m+1)} - u_{x_0+z}^{(2m+1)}$$

conserve toujours le même signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, on en tire facilement l'expression

$$(52)\quad h(u'_{x_1} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\{\Delta u'_{x_1} - \Delta u'_{x_0}\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}\{\Delta u_{x_1}^{(2m-2)} - \Delta u_{x_0}^{(2m-2)}\}$$

$$+ (-1)^{m+1}.\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\{\Delta u_{x_1}^{(2m)} - \Delta u_{x_0}^{(2m)}\},\qquad (0 < \theta < 1)$$

d'où, en faisant

$$u'_{x_1+z} - u'_{x_0+z} = \sum_{x_0}^{x_1} f(x+z),$$

on obtiendra

$$(53)\qquad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\}$$

$$-\frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\{f'''(x_1) - f'''(x_0)\} + \dots + \frac{(-1)^m . B_{m-1} . h^{2m-2}}{1.2\dots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\}$$

$$+(-1)^{m+1}.\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\dots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}. \qquad (0 < \theta < 1)$$

Cette formule suppose que

$$\sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z)$$

conserve son signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$. En la comparant à la formule (6), on trouvera facilement

1° que dans notre formule le terme complémentaire est compris entre des limites plus reserrées;

2° qu'il n'y est pas nécessaire que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de h. Il faut seulement observer que dans ce cas le membre à droite de (53) ne donne qu'une valeur particulière de $\sum_{x_0}^{x_1} f(x)$; d'où, pour en avoir la valeur générale, il faut la compléter par

$$(54)\qquad \vartheta(x_1) - \vartheta(x_0),$$

$\vartheta(x)$ étant une fonction périodique quelconque, telle que

$$\vartheta(x+h) - \vartheta(x) = 0.$$

La formule (6) au contraire exige nécessairement que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de h.

3° La déduction de la formule (6) suppose que $f^{(2m)}(x)$ conserve le

même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$; pour notre formule (53) il suffit que

$$(55) \qquad \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x + z)$$

ne change pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$. En effet, dans le cas où $x_1 - x_0$ est un multiple exact de h, il est évident que cela a toujours lieu, si $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$; mais cela peut aussi avoir lieu sans cela.

§ 11.

En ajoutant à (51) l'expression

$$0 = (-1)^{m+1} \left\{ \frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m} . \Delta u_x^{(2m)} - \frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m} . \Delta u_x^{(2m)} \right\},$$

on aura

$$(56) \qquad h u'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} . \Delta u'_x - \frac{B_1 h^2}{1.2} . \Delta u''_x + \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4} . \Delta u_x^{\mathrm{IV}} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m+1} . \frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m} . \Delta u_x^{(2m)} + (-1)^{m+1} \left\{ \theta . \frac{2^{2m} - 1}{2^{2m-1}} - 1 \right\} \frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m} . \Delta u_x^{(2m)};$$

et de même on tirera de (53

$$(57) \qquad h \sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - \frac{h}{2} \{ f(x_1) - f(x_0) \} + \frac{B_1 h^2}{1.2} \{ f'(x_1) - f'(x_0) \}$$

$$- \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4} \{ f'''(x_1) - f'''(x_0) \} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1} . B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m} \{ f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0) \}$$

$$+ (-1)^{m+1} \left\{ \theta . \frac{2^{2m} - 1}{2^{2m-1}} - 1 \right\} . \frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m} \{ f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0) \}.$$

Cette formule fait voir que, si dans le calcul de

$$h\sum_{x_0}^{x_1} f(x)$$

on s'arrête à un certain terme du développement, la valeur numérique du terme complémentaire ne surpasse jamais celle du dernier terme.

§ 12.

En mettant dans (43) $m+1$ à la place de m, et en comparant le résultat à (51), on aura

$$(58)\qquad \frac{B_{m+1}\cdot h^{2m+3}}{1.2\ldots(2m+2)}\cdot u_{x+\theta h}^{(2m+3)} = -\left\{\theta\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}-1\right\}\cdot\frac{B_m\cdot h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\cdot\int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}dz.$$

Donc, si les dérivées

$$u_{x+z}^{(2m+1)} \text{ et } u_{x+z}^{(2m+3)}$$

ne changent pas de signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$, et qu'elles aient le même signe, il faut que

$$\theta\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}-1$$

soit négatif, c'est à dire que[1]

$$\theta\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}=\theta<1,$$

ce qui substitué dans (51) donnera immédiatement le théorème suivant:

---

[1] Il faut observer que nous désignons toujours par θ une quantité positive dont on ne connaît que $0<\theta<1$.

Théorème III. *Soit u_{x+z} une fonction quelconque de x qui, de même que ses $2m+3$ premières dérivées, est continue depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$; supposons de plus que la $(2m+1)^{\text{ième}}$ et la $(2m+3)^{\text{ième}}$ dérivées*

$$u_{x+z}^{(2m+1)} \text{ et } u_{x+z}^{(2m+3)},$$

ne changeant pas de signe entre ces limites, soient toutes deux du même signe; dans ce cas nous aurons

$$(59)\qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}.\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}.\Delta u_x^{\text{IV}} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m.\frac{B_{m-1}h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}.\Delta u_x^{(2m-2)} + (-1)^{m+1}.\theta.\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)},$$

$$0 < \theta < 1.$$

De même, en mettant dans (47) $m+1$ à la place de m et en comparant le résultat à (57), nous aurons, à cause de

$$f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0) = \int_0^h \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z)dz,$$

cette formule

$$(60)\qquad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\}$$

$$- \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\{f'''(x_1) - f'''(x_0)\} + \ldots + (-1)^m.\frac{B_{m-1}h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\}$$

$$+ (-1)^{m+1}.\theta.\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} \qquad (0 < \theta < 1)$$

pour le cas où

$$(61)\qquad \sum^{x_1} f^{(2m)}(x+z) \text{ et } \sum^{x_1} f^{(2m+2)}(x+z),$$

ne changeant pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, ont toutes deux le même signe. La formule (60) est précisément celle qui a été proposée par JACOBI (voir la formule (8)).

Applications. [1]

§ 13.

Nous ferons maintenant quelques applications du dernier des théorèmes proposés.

Première application. Développement de $\log \Gamma(x)$.

En multipliant par dx la formule connue

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \int_0^x dz \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-z}} \right),$$

et en intégrant par rapport à x, à partir de $x = 1$, on obtiendra

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-z}dz}{z} \cdot \left[x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)z}}{1 - e^{-z}} \right].$$

Supposons dans (59) $h = 1$ et

$$(62) \qquad u'_x = \int_0^\infty \frac{e^{-z}dz}{z} \cdot \left[x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)z}}{1 - e^{-z}} \right] = \log \Gamma(x),$$

---

[1] Il ne faut pas oublier que ces applications ont été faites en 1846, il y a 38 ans.

d'où

$$(63) \qquad u''_x = \int_0^\infty dz \left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-z}} \right],$$

et en général, r étant > 2,

$$u_x^{(r)} = (-1)^{r-1} \cdot \int_0^\infty \frac{z^{r-2} \cdot e^{-xz}}{1 - e^{-z}} dz;$$

cette supposition satisfera évidemment aux conditions du théorème III.

À cause de

$$\Delta u_x = \int_0^h u'_{x+y} dy,$$

on aura pour le cas en question

$$\Delta u_x = \int_0^h \log \Gamma(x + y) dy$$

et, en faisant $x + y = y_1$,

$$\Delta u_x = \int_0^1 \log \Gamma(y_1 + 1) dy_1 + \int_1^x \log \Gamma(y_1 + 1) dy_1 - \int_0^{x-1} \log \Gamma(y_1 + 1) dy_1$$

$$= \int_0^1 \log \Gamma(y_1 + 1) dy_1 + \int_1^x [\log \Gamma(y_1 + 1) - \log \Gamma(y_1)] dy_1,$$

c'est à dire

$$\Delta u_x = \int_0^1 \log \Gamma(y_1 + 1) dy_1 + \int_1^x \log y_1 . dy;$$

d'où enfin, en vertu d'une formule donnée par RAABE, savoir

$$\int_0^1 \log \Gamma(y_1 + 1) dy_1 = \frac{1}{2} \log(2\pi) - 1,$$

on aura

$$\Delta u_x = \frac{1}{2}\log(2\pi) + x.\log x - x,$$

et partant

$$\Delta u'_x = \log x,$$

et en général pour $r > 1$

$$\Delta u_x^{(r)} = (-1)^r.\frac{\Gamma(r-1)}{x^{r-1}}.$$

Pour ces valeurs de u'_x, Δu_x, $\Delta u'_x$ etc. le théorème III donnera

$$\log\Gamma(x) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1}.B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\theta}{x^{2m-1}},$$

$$(0 < \theta < 1)$$

ou, en y ajoutant $\log x$,

$$(64)\quad \log\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1}.B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\theta}{x^{2m-1}},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Cette formule est généralement applicable, quelle que soit la valeur positive de x, ce qui n'est pas le cas pour les résultats que les méthodes ordinaires donnent pour le développement de $\log\Gamma(x+1)$. Leur point de départ étant ordinairement la formule

$$\log\Gamma(x+1) = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log x,$$

le résultat n'est rigoureusement le développement de $\log \Gamma(x+1)$ que pour des valeurs entières de x. Quant aux analyses qui ne sont pas sujettes à cette restriction (p. ex. celle de CAUCHY et celle de LIOUVILLE), elles sont tout à fait particulières pour le développement de $\log \Gamma(x+1)$, et n'ont pas de relation avec la formule sommatoire générale d'EULER.

En posant pour abréger

$$M(x) = \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m \cdot B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1}\cdot B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{1}{x^{2m-1}},$$

on tirera de (64), pour une valeur quelconque de $x > 0$, l'expression

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\,.\,x^x.e^{-x}.e^{M(x)};$$

ce qui donnera successivement les relations suivantes

$$\Gamma(x+1) > \sqrt{2\pi x}\,.\,x^x.e^{-x},$$

$$\Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi x}\,.\,x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}},$$

$$\Gamma(x+1) > \sqrt{2\pi x}\,.\,x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}}.e^{-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}},$$

$$\Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi x}\,.\,x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}}.e^{-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}}.e^{\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5}},$$

. . . .

Ces mêmes relations ont déjà été trouvées par RAABE pour des nombres entiers quelconques de x. Ce géomètre finit son mémoire (Journal de CRELLE, T. XXV, p. 159) par ces mots: »Sans doute elles subsistent encore pour des valeurs fractionnaires et même incommensurables; mais je n'ai pu réussir jusqu'à présent à démontrer cela rigoureusement.»

§ 14.

Deuxième application.

Supposons dans (59) $h = 1$ et

$$(65) \qquad u'_x = \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(b+x).\Gamma(a-b+x)},$$

où $a > b$; nous aurons facilement, en vertu de (63),

$$u''_x = -\int_0^\infty dz\left[\frac{e^{-z}}{z} + \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\left(e^{-az} - e^{-bz} - e^{-(a-b)z}\right)\right],$$

et généralement pour $r > 2$

$$u_x^{(r)} = (-1)^{r-1}.\int_0^\infty \frac{z^{r-2}.e^{-xz}}{1-e^{-z}}\left(e^{-bz} + e^{-(a-b)z} - e^{-az}\right)dz.$$

Cette expression satisfera évidemment aux conditions du théorème III, d'où l'on conclut qu'en s'arrêtant dans le développement de (65) à un certain terme la valeur numérique du reste ne surpasse jamais celle du terme suivant. Ce développement s'obtiendra sans difficulté à l'aide de (64), qui donnera

$$(66) \log\left\{\frac{\Gamma(a+x+1)}{\Gamma(b+x+1).\Gamma(a-b+x+1)}\right\} = -\tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \left(a+x+\tfrac{1}{2}\right)\log(a+x)$$

$$-\left(b+x+\tfrac{1}{2}\right)\log(b+x) - (a-b+x+1)\log(a-b+x) + x + \frac{B_1}{1.2}.q_1(x)$$

$$-\frac{B_2}{3.4}.q_3(x) + \ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-1)}.q_{2m-3}(x) + \frac{(-1)^{m+1}.\theta.B_m}{(2m-1)2m}.q_{2m-1}(x).$$

où, pour abréger, on a posé

$$q_k(x) = \frac{1}{(a+x)^k} - \frac{1}{(b+x)^k} - \frac{1}{(a-b+x)^k}.$$

Supposons $x = 0$; en écrivant q_k au lieu de $q_k(0)$ et en faisant

$$(67)\quad N(q) = \frac{B_1}{1.2}\cdot q_1 - \frac{B_2}{3.4}\cdot q_3 + \ldots + \frac{(-1)^m \cdot B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot q_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1}\cdot\theta\cdot B_m}{(2m-1)2m}\cdot q_{2m-1},$$

nous aurons

$$\log\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)} = -\frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(a+\frac{1}{2}\right)\log a - \left(b+\frac{1}{2}\right)\log b$$

$$-\left(a-b+\frac{1}{2}\right)\log(a-b) + N(q),$$

et partant

$$(68)\qquad \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)} = \sqrt{\frac{a}{2\pi b(a-b)}}\cdot\frac{a^a\cdot e^{N(q)}}{b^b(a-b)^{a-b}}.$$

Lorsque a et b sont des nombres entiers, cette formule donne la valeur du coëfficient du $(b+1)^{\text{ième}}$ terme du développement de $(m+n)^a$.

Si $a = 2r$ et $b = r$, on obtiendra la valeur du coëfficient du terme moyen du développement de $(m+n)^{2r}$. En désignant ce coëfficient par F, on aura

$$(69)\qquad F = \frac{2^{2r}}{\sqrt{\pi r}}.e^{-\mathfrak{p}(r)},$$

où

$$\mathfrak{p}(r) = \frac{2^2-1}{2}\cdot\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{2^4-1}{2^3}\cdot\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{r^3} + \frac{2^6-1}{2^5}\cdot\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{r^5} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m\cdot\frac{2^{2m-2}-1}{2^{2m-3}}\cdot\frac{B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{r^{2m-3}} + (-1)^{m+1}\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\theta}{r^{2m-1}}.$$

Désignons par T le plus grand terme du développement de

$$(m+n)^{mr+nr};$$

on sait que ce terme est le $(nr+1)^{\text{ième}}$ [1], et partant nous aurons

$$T = \mathfrak{A} m^{mr+nr}.$$

Quant au coëfficient $\mathfrak{A}$, il s'obtiendra par (68) en faisant $a = mr + nr$ et $b = nr$; d'où il résultera enfin

(70) $$T = \sqrt{\frac{m+n}{2\pi . mnr}} . e^{Q} . (m+n)^{mr+nr},$$

en posant pour abréger

$$Q = \frac{B_1}{1.2} . v_1 - \frac{B_2}{3.4} . v_3 + \ldots + \frac{(-1)^m . B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)} . v_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1} . \theta . B_m}{(2m-1)2m} . v_{2m-1},$$

---

[1] Ceci se démontre facilement de la manière suivante. Désignons par T_k le $k^{\text{ième}}$ terme dans le développement de $(m+n)^{mr+nr}$; on voit aisément que

$$T_k - T_{k+1} = \frac{(mr+nr)_{k-1}}{k} . m^{mr+nr-k} . n^{k-1} \{(k-nr)(m+n) - n\}.$$

Mais, à cause de

$$(k-nr)(m+n) - n < 0 \text{ pour } k \leqq nr$$

et

$$(k-nr)(m+n) - n > 0 \text{ pour } k > nr,$$

on trouvera immédiatement que,

pour $k \leqq nr$, chaque terme est plus *grand* que celui qui le précède immédiatement,
pour $k > nr$, chaque terme est *moindre* que celui qui le précède immédiatement;

d'où il s'ensuit que

$$T_1 < T_2 < \ldots < T_{nr} < T_{nr+1}$$

et

$$T_{nr+1} > T_{nr+2} > T_{nr+3} > \ldots > T_{nr+mr+1},$$

c'est à dire, que T_{nr+1} *est le plus grand terme.*

où généralement

$$r_k = \frac{1}{r^k}\left\{\frac{1}{(m+n)^k} - \frac{1}{m^k} - \frac{1}{n^k}\right\}.$$

La formule (70) donnera immédiatement

(71) $$\frac{T}{(m+n)^{mr+nr}} = \sqrt{\frac{m+n}{2\pi . mnr}} . e^Q;$$

ce qui est l'expression du rapport du plus grand terme T du développement de $(m+n)^{mr+nr}$ au binôme $(m+n)^{mr+nr}$ lui-même.

Avec la même facilité, que nous avons obtenu la formule (68), en prenant pour point de départ la formule

$$u'_x = \log\left\{\frac{\Gamma(b+x) . \Gamma(a-b+x)}{\Gamma(c+x) . \Gamma(a-c+x)}\right\},$$

nous aurions aussi trouvé

(72) $$\frac{\Gamma(b+1) . \Gamma(a-b+1)}{\Gamma(c+1) . \Gamma(a-c+1)} = \sqrt{\frac{b(a-b)}{c(a-c)}} \cdot \frac{b^b . (a-b)^{a-b}}{c^c . (a-c)^{a-c}} . e^{N(p)},$$

en posant

$$N(p) = \frac{B_1}{1 . 2} . p_1 - \frac{B_2}{3 . 4} . p_3 + \ldots + \frac{(-1)^m . B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)} . p_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1} . \theta . B_m}{(2m-1)2m} . p_{2m-1},$$

où généralement

$$p_k = \frac{1}{b^k} + \frac{1}{(a-b)^k} - \frac{1}{c^k} - \frac{1}{(a-c)^k}.$$

Si a, b, c sont des nombres entiers, la formule (72) donnera l'expression du rapport entre le $(c+1)^{\text{ième}}$ et le $(b+1)^{\text{ième}}$ terme du développement de $(m+n)^a$, savoir

$$\sqrt{\frac{b(a-b)}{c(a-c)}} \cdot \frac{b^b (a-b)^{a-b}}{c^c (a-c)^{a-c}} \cdot \frac{n^{c-b}}{m^{c-b}} . e^{N(p)}.$$

Les expressions, que nous venons de trouver, étant d'une grande importance pour le calcul des probabilités, ont été proposées par LAPLACE. Mais cet illustre analyste n'a pas remarqué que, les séries dont il s'agit étant divergentes, leur emploi n'est pas légitime, à moins que les limites des termes complémentaires ne soient déterminées. C'est ce qui peut toujours se faire à l'aide de nos formules.

§ 15.

Troisième application.

Posons suivant LEGENDRE

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty dz\left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-z}}\right) = Z'(x);$$

en faisant dans (59) $h = 1$ et

$$(73)\qquad u'_x = Z'(n+1-x) - Z'(n+x) = -\int_0^\infty \frac{dz}{1-e^{-z}}\left(e^{-(n+1-x)z} - e^{-(n+x)z}\right),$$

nous aurons généralement

$$u_x^{(r)} = -\int_0^\infty \frac{z^{r-1}dz}{1-e^{-z}}\left(e^{-(n+1-x)z} + (-1)^r.e^{-(n+x)z}\right),$$

d'où l'on voit que les conditions du théorème III sont remplies. De plus, la formule (73) donne

$$\Delta u_x = \int_0^1 u'_{x+y}dy = \log\frac{n-x}{n+x},$$

et généralement

$$\Delta u_x^{(r)} = (-1)^r . \Gamma(r) . b_r ,$$

en faisant pour abréger

$$(74) \qquad b_r = \frac{1}{(x+n)^r} - \frac{1}{(x-n)^r} .$$

Au moyen de ces valeurs de u'_x, Δu_x, $\Delta u'_x$, etc. et à l'aide de la formule connue

$$(75) \qquad Z'(1+a) = \frac{1}{a} + Z'(a),$$

on tirera immédiatement de (59)

$$(76) \quad Z'(n-x) - Z'(n+x) = \log\frac{n-x}{n+x} - \frac{x}{n^2-x^2} + \frac{B_1}{2} . b_2 - \frac{B_2}{4} . b_4 + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^m . B_{m-1}}{2m-2} . b_{2m-2} + \frac{(-1)^{m+1} . \theta . B_m}{2m} . b_{2m} ,$$

$$(0 < \theta < 1)$$

b_r étant déterminé par (74). La formule (76) subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de x, numériquement inférieures à n.

Soit k un nombre entier positif ou négatif, dont la valeur numérique ne surpasse pas n; x étant tel que

$$k > x > k - 1,$$

on aura, en vertu de (75),

$$Z'(n-x) = Z'(k-x) + \mathop{\mathrm{S}}_{i=k}^{i=n-1} \frac{1}{i-x} ,$$

$$Z'(n+x) = Z'(1-[k-x]) + \mathop{\mathrm{S}}_{i=k}^{i=n-1} \frac{1}{i+x} + \mathop{\mathrm{S}}_{i=-(k-1)}^{i=k-1} \frac{1}{i+x}$$

$$= \frac{1}{x} + Z'(1-[k-x]) + \mathop{\mathrm{S}}_{i=k}^{i=n-1} \frac{1}{i+x} - \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=k-1} \frac{2x}{i^2-x^2} ,$$

d'où, en soustrayant,

$$Z'(n-x)-Z'(n+x)=Z'(k-x)-Z'(1-[k-x])-\frac{1}{x}+\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n-1}\frac{2x}{i^2-x^2}.$$

En substituant cette valeur dans (76), et en se rappelant que $k>x>k-1$, et de plus que

$$Z'(k-x)-Z'(1-[k-x])=-\pi.\mathrm{cotg}\,(k-x)\pi=\pi.\mathrm{cotg}\,\pi x,$$

on aura

$$(77)\qquad \pi\,\mathrm{cotg}\,\pi x=\log\frac{n-x}{n+x}+\frac{1}{x}-\frac{x}{n^2-x^2}-\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n-1}\frac{2x}{i^2-x^2}$$

$$+\frac{B_1}{2}.b_2-\frac{B_2}{4}.b_4+\ldots+\frac{(-1)^m.B_{m-1}}{2m-2}.b_{2m-2}+\frac{(-1)^{m+1}.\theta.B_m}{2m}.b_{2m},$$

où b_r est donné par (74). Cette formule est applicable pour toutes les valeurs de x, positives ou négatives, non entières et non supérieures à n. Dans le cas où *x est un nombre entier* $<n$, les deux membres de (77) deviennent infinis; mais on démontrera facilement que, x convergeant vers un nombre entier $\mu<n$, le rapport des deux membres convergera vers l'unité. Donc, généralement la formule (77) subsistera pour toutes les valeurs positives et négatives de x, inférieures à n.

De cette formule générale, qui (je crois) n'a pas été proposée jusqu'ici, on tirera, en faisant $n=\infty$, la formule connue

$$\pi\,\mathrm{cotg}\,\pi x=\frac{1}{x}-\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty}\frac{2x}{i^2-x^2}.$$

§ 16.

Quatrième application.

En faisant dans (59) $h = 1$ et

$$u'_x = \log\left\{\frac{\Gamma(x-y).\Gamma(x+y)}{[\Gamma(x)]^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}dz}{1-e^{-z}}(e^{yz}+e^{-yz}-2),$$

$$(x > y)$$

les conditions du théorème III sont satisfaites. Il s'ensuit qu'en s'arrêtant à un certain terme du développement la valeur numérique du reste ne surpasse jamais celle du terme suivant. Donc, en faisant $x =$ un nombre entier n, on tirera de (64)

$$(78) \quad \log\left\{\frac{\Gamma(n-y).\Gamma(n+y)}{[\Gamma(n)]^2}\right\} = \left(n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right) - y.\log\frac{n-y}{n+y} + L,$$

en posant pour abréger

$$L = \frac{B_1}{1.2}.a_1 - \frac{B_2}{3.4}.a_3 + \ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}.a_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1}.\theta.B_m}{(2m-1)2m}.a_{2m-1},$$

où généralement

$$a_r = \frac{1}{(n+y)^r} + \frac{1}{(n-y)^r} - \frac{2}{n^r}.$$

La formule (78) subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de y inférieures à n.

Soit k un nombre entier positif ou négatif, dont la valeur numérique n'est pas supérieur à n, et soit y tel que

$$k > y > k-1,$$

on aura, en vertu d'une propriété connue la fonction Γ,

$$\log \Gamma(n-y) = \log \Gamma(k-y) + \frac{1}{2}\cdot \underset{i=k}{\overset{i=n-1}{\mathrm{S}}} \log(i-y)^2,$$

$$\log \Gamma(n+y) = \log \Gamma(1-[k-y]) + \frac{1}{2}\log y^2 + \frac{1}{2}\cdot \underset{i=k}{\overset{i=n-1}{\mathrm{S}}} \log(i+y)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \underset{i=1}{\overset{i=k-1}{\mathrm{S}}} \log(i^2-y^2)^2,$$

et partant

$$\log\{\Gamma(n-y).\Gamma(n+y)\} = \log\{\Gamma(k-y).\Gamma(1-[k-y])\}$$

$$+ \frac{1}{2}\log y^2 + \underset{i=1}{\overset{i=n-1}{\mathrm{S}}} \log(i^2-y^2)^2.$$

En substituant cette valeur dans (78) et en se rappelant que

$$\Gamma(k-y).\Gamma(1-[k-y]) = \frac{\pi}{\sin(k-y)\pi},$$

on obtiendra

$$\frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{\sin^2(k-y)\pi} = 2\log\Gamma(n) - \frac{1}{2}\log y^2 - \frac{1}{2}\cdot \underset{i=1}{\overset{i=n-1}{\mathrm{S}}} \log(i^2-y^2)^2$$

$$+ \left(n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right) - y.\log\frac{n-y}{n+y} + L,$$

d'où

$$\sin^2 \pi y =$$

$$\pi^2 y^2(1-y^2)^2\left(1-\frac{y^2}{4}\right)^2\left(1-\frac{y^2}{9}\right)^2\cdots\left(1-\frac{y^2}{(n-1)^2}\right)^2\cdot\frac{e^{-2L}}{\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^{2n-1}}\cdot\left(\frac{n-y}{n+y}\right)^{2y},$$

et enfin

$$\sin \pi y =$$

$$\pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{(n-1)^2}\right)\cdot\frac{e^{-L}}{\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{n-y}{n+y}\right)^y,$$

formule qui subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de y, inférieures à n.

De cette formule remarquable, qui (je crois) n'a pas été encore proposée, on tirera immédiatement, en faisant $n=\infty$, la formule connue

$$\sin \pi y = \pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\left(1-\frac{y^2}{16}\right)\cdots.$$

Upsala le 20 Avril 1846.

BEWEIS EINES SATZES
AUS DER MANNIGFALTIGKEITSLEHRE

VON

EDVARD PHRAGMÉN
in STOCKHOLM.

Hr. Bendixson hat im zweiten Bande der Acta Mathematica unter anderen auf die Theorie der Punktmengen sich beziehenden Sätzen auch den folgenden gegeben:

Ist P eine beliebige Punktmenge und Ω die erste Zahl der dritten Zahlenklasse des Hrn. Cantor, *so hat die Menge $P' - P^{(\Omega)}$ die erste Mächtigkeit.*

Den Beweis giebt er daselbst nur für den speciellen Fall einer linearen Punktmenge, deutet aber an, es könne derselbe auch im allgemeinen Falle in analoger Weise geführt werden. Wie dies geschehen kann, will ich hier zeigen — nach einer Methode, die einfacher zu sein scheint als die, welche Hr. Bendixson selbst gebraucht.

In der That, man nehme eine unendliche Folge positiver Grössen

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

im Übrigen willkürlich, jedoch so an, dass immer $\delta_n > \delta_{n+1}$ und dass

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$$

ist. Ferner definire man die Punktmengen

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

durch die Bestimmung, dass Q_n die Gesammtheit derjenigen Punkte von $P' - P^{(\Omega)}$ sein soll, die der Bedingung entsprechen, dass die untere Grenze ihrer Entfernungen von den Punkten der Menge $P^{(\Omega)}$ grösser als δ_n, aber, wenn $n > 1$, kleiner oder gleich δ_{n-1} ist. Mit der Entfernung eines Punktes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von einem Punkte $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ ist hier wie gewöhnlich der Ausdruck

$$\sqrt{|x_1 - x'_1|^2 + |x_2 - x'_2|^2 + \cdots + |x_n - x'_n|^2}$$

gemeint, jedoch mit der Modifikation, dass wenn eine der Grössen $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ den Werth ∞ hat, die entsprechende Differenz $x_r - x'_r$ gegen $\frac{1}{x_r}$ ausgetauscht werden soll.

Es muss dann

$$Q_n^{(\Omega)} \equiv 0$$

sein, denn ein Punkt von $Q_n^{(\Omega)}$ müsste auch zu $P^{(\Omega)}$ gehören und es müsste die untere Grenze der Entfernungen der Punkte von Q_n von diesem zu $P^{(\Omega)}$ gehörigen Punkte gleich Null sein, was nach der Definition von Q_n nicht sein kann. Die Menge Q_n ist also eine abzählbare und dies ist somit auch mit der Menge

$$Q \equiv Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$$

der Fall.

Nun ist aber

$$Q \equiv P' - P^{(\Omega)}.$$

Für jeden Punkt der Menge $P' - P^{(\Omega)}$ muss nämlich — da jeder Grenzpunkt von $P^{(\Omega)}$ auch ein Punkt dieser Menge ist — die untere Grenze seiner Entfernungen von den Punkten der Menge $P^{(\Omega)}$ einen von Null verschiedenen Werth haben, und er muss daher zu einer gewissen Menge Q_n und somit auch zu Q gehören. Jeder Punkt von Q aber gehört nach der Definition dieser Punktmenge nothwendig auch zu $P' - P^{(\Omega)}$.

Es ist also

$$P' - P^{(\Omega)}$$

eine abzählbare Punktmenge. w. z. b. w.

Der obige Beweis gilt auch noch für den Fall ungeändert, wo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ komplexe Veränderliche bezeichnen.

ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN ÜBER RECTIFICATION DER CURVEN

VON

LUDWIG SCHEEFFER
in MÜNCHEN.

Die folgenden Untersuchungen wurden veranlasst durch das Studium einer merkwürdigen Funktion. Dieselbe ist überall stetig, ihr Differentialquotient (und auch das Quadrat desselben) besitzt aber in jedem noch so kleinen Intervall dieselbe von o verschiedene Schwankung, sodass dem bestimmten Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

unter Zugrundelegung der RIEMANN'schen Definition eine Bedeutung nicht zukommt. Dennoch geht aus geometrischen Betrachtungen auf das Unzweideutigste hervor, dass die durch jene Funktion definirte Curve zwischen je zweien ihrer Punkte eine ganz bestimmte endliche Länge hat. Daraus folgt, dass der Begriff der Länge einer Curve nicht von dem Umstande abhängig sein kann, ob jenes bestimmte Integral Sinn hat, oder nicht. Die von Herrn DU BOIS-REYMOND (1) gegebene Definition der Länge einer Curve ist also jedenfalls zu eng.

---

(1) Mathematische Annalen, B. 15, pag. 287.

Hiermit drängt sich die Nothwendigkeit einer allgemeineren Definition des Begriffes »Länge« und gleichzeitig die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen auf, denen eine Funktion $f(x)$ genügen muss, damit die durch die Gleichung $y = f(x)$ definirte Curve zwischen zweien ihrer Punkte eine bestimmte endliche Länge habe.

Die Beantwortung dieser Frage für den Fall, dass die Funktion $f(x)$ von x_0 bis x_1 eindeutig gegeben ist, bildet den Inhalt dieser Abhandlung. Es werden dabei weder über die Stetigkeit, noch über die Differentiirbarkeit von $f(x)$ irgend welche Voraussetzungen gemacht.

Die Resultate, welche in den Theoremen I—VII zusammengefasst und an Beispielen erläutert sind, zeigen, dass die Existenz der Länge einer Curve in keiner Weise von dem Umstande abhängig ist, ob die Curve im Allgemeinen eine Richtung besitzt, oder nicht. Wir werden zur besseren Beleuchtung dieses Gegenstandes in einer späteren Arbeit Curven definiren, welche eine bestimmte Länge zwischen je zweien ihrer Punkte besitzen, obgleich die Gesammtheit der Stellen, wo keine Tangente existirt, in jedem Intervall von der Mächtigkeit des Linearcontinuums ist.

1.

Wir geben in dieser Nummer die Definition einiger Begriffe: »Länge«, »derivirte Funktionen«, »Richtungsschwankung«.

Es sei $y = f(x)$ eine in dem ganzen Intervall $x_0 x_1$ eindeutig gegebene Funktion. Wir nehmen eine endliche Anzahl von Werthen x an, deren kleinster x_0, deren grösster x_1 ist und bezeichnen dieselben, nach der Grösse geordnet, mit x_{10}, x_{11}, x_{12}, ..., die entsprechenden Werthe von y mit y_{10}, y_{11}, y_{12}, ... Es sei ferner

$$L_1 = \sum_{r=0,1,\ldots} \sqrt{(x_{1,r+1} - x_{1,r})^2 + (y_{1,r+1} - y_{1,r})^2},$$

wo auf der rechten Seite über alle $x_{1,r}$ von x_0 bis x_1 zu summiren ist. Nun schieben wir zwischen je zwei der Punkte $x_{1,r}$ neue, wiederum in

endlicher Anzahl, ein und bezeichnen die Gesammtheit der schon vorhandenen und der neu hinzutretenden Werthe x in der Reihenfolge ihrer Grösse mit $x_{20}, x_{21}, x_{22}, \ldots$, die entsprechenden Werthe von y mit $y_{20}, y_{21}, y_{22}, \ldots$ Es sei dann wiederum

$$L_2 = \sum_{r=0,1,\ldots} \sqrt{(x_{2,r+1} - x_{2,r})^2 + (y_{2,r+1} - y_{2,r})^2},$$

wo die Summe auf der rechten Seite sich über alle $x_{2,r}$ von x_0 bis x_1 erstreckt. Durch Einschiebung neuer Punkte und Zusammenfassung derselben mit den früheren entsteht eine dritte Reihe $x_{30}, x_{31}, x_{32}, \ldots$ und eine entsprechende Grösse L_3. Hiernach ist klar, was unter der Reihe $x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, y_{n0}, y_{n1}, y_{n2}, \ldots$ und der Grösse L_n zu verstehen ist.

Das Gesetz, nach welchem die Theilung der Abscissenaxe fortschreitet, nehmen wir ganz beliebig an und unterwerfen es nur der einen Bedingung, dass alle Differenzen $x_{n,r+1} - x_{n,r}$ mit wachsendem n unendlich klein werden. Genauer: *Nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse δ soll n immer so zu bestimmen sein, dass die Differenzen $x_{n,r+1} - x_{n,r}$ sämmtlich kleiner als δ sind.*

Offenbar ist allgemein $L_{n+1} \geqq L_n$. Es nähern sich daher nach einem bekannten Satze die Grössen L_n mit wachsendem n entweder einem bestimmten endlichen Grenzwerthe, oder sie werden unendlich gross. Tritt der erste Fall ein, so bleibt die Möglichkeit offen, dass bei einer anderen Wahl der Theilpunkte die Grössen L_n sich entweder einem anderen endlichen Grenzwerthe nähern oder unendlich gross werden. Wir geben nun folgende

Definition. Die durch die Gleichung $y = f(x)$ definirte Curve hat zwischen den Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 die Länge L, wenn die Grössen L_n sich bei jeder Wahl der Theilpunkte demselben endlichen Grenzwerthe L nähern. Anderenfalls kommt der Curve eine Länge nicht zu. (1)

---

(1) Diese Definition der Länge ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit der von Duhamel angegebenen. (Vergl. Stolz: *Über die Bedeutung* Bolzano's *in der Geschichte der Infinitesimalrechnung*. Mathematische Annalen B. 18 pag. 270). Sie lässt sich vollständig auf dieselbe reduciren, wenn man der Auffassung der Curve als eines Continuums dadurch Ausdruck giebt, dass man die Funktion $f(x)$ an den Sprungstellen alle zwischen $f(x-0)$ und $f(x+0)$ gelegenen Werthe annehmen lässt. Wir haben es vorgezogen, die

Die zweite Definition, von welcher im Verlauf dieser Untersuchungen vielfach Anwendung gemacht wird, ist diejenige der »*derivirten Funktionen*«. Wir werden, abweichend von dem bisherigen Gebrauch, bei einer ganz willkürlichen, stetigen oder unstetigen Funktion $f(x)$ an jeder Stelle von derivirten Funktionen sprechen und darunter die Unbestimmtheitsgrenzen des vorderen und hinteren Differentialquotienten verstehn.

Wenn nämlich die positive Grösse h beliebig angenommen wird, hat die Gesammtheit der Grössen

$$\frac{f(x+h')-f(x)}{h'},$$

wenn h' alle zwischen o und h gelegenen Werthe erhält, eine bestimmte obere und eine bestimmte untere Grenze. Natürlich ist der Fall, dass eine dieser Grenzen, oder beide, unendlich gross sind, nicht auszuschliessen. Bezeichnen wir für den Augenblick die obere Grenze mit D_h, die untere mit D'_h, so ist für $h_1 < h$ stets $D_{h_1} \leqq D_h$ und $D'_{h_1} \geqq D'_h$. Es nähert sich daher die Grösse D_h mit abnehmendem h entweder einer bestimmten endlichen Grenze, oder sie ist beständig $+\infty$, oder sie nimmt unbegrenzt ab bis $-\infty$. Ebenso nähert sich D'_h entweder einem bestimmten endlichen Grenzwerth, oder ist beständig $-\infty$, oder nimmt unbegrenzt zu bis $+\infty$. In jedem Falle sind die Grenzwerthe

$$\lim_{h=0} D_h \quad \text{und} \quad \lim_{h=0} D'_h$$

völlig bestimmt. Wir bezeichnen dieselben mit $D^+f(x)$ und $D_+f(x)$ und nennen sie die »*vordere obere*« und die »*vordere untere Derivirte*« von $f(x)$.

Es ist hiernach ohne Weiteres klar, was unter der »*hinteren oberen Derivirten*« $D^-f(x)$ und der »*hinteren unteren Derivirten*« $D_-f(x)$ zu verstehen ist.

Der vorwärts genommene Differentialquotient $f'_+(x)$ hat an denjenigen Stellen x einen bestimmten Werth, wo $D^+ = D_+$ ist, der rückwärts ge-

---

Funktion $f(x)$ überall eindeutig bestimmt vorauszusetzen und erst vermittelst unserer eigenthümlichen Definition der »Länge« die Anschauung von der Continuität der Curve an den Sprungstellen der Funktion $f(x)$ zum Ausdruck zu bringen.

nommene $f'_-(x)$ an denjenigen Stellen, wo $D^- = D_-$ ist; und zwar wird im ersten Falle $f'_+(x) = D^+ = D_+$, im letzten Falle $f'_-(x) = D^- = D_-$. (1)

Der dritte Begriff, den wir definiren müssen, da er in den folgenden Untersuchungen gebraucht wird, ist derjenige der »*Richtungsschwankung*«. Wir unterscheiden die »*Richtungsschwankung einer Curve an einer Stelle* x, y« von der »*Richtungsschwankung in der Umgebung einer Stelle* x, y«.

Wir sagen, die *Richtung der Curve* $y = f(x)$ *schwanke an der Stelle* x, y *zwischen den Winkeln* α *und* α' $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \leqq \alpha' \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, wenn die grössere der beiden Grössen D^+ und D^- gleich $\operatorname{tg}\alpha$, die kleinere der Grössen D_+ und D_- gleich $\operatorname{tg}\alpha'$ ist. Die Differenz $\alpha - \alpha'$ nennen wir die *Richtungsschwankung der Curve an der Stelle* x, y.

In dem Intervalle $x - h$ bis $x + h$, aus welchem nur die Stelle x selbst ausgeschlossen sein soll, hat von den eben definirten Winkeln α und α' der erste eine obere Grenze α_h, der zweite eine untere Grenze α'_h. Wenn h abnimmt, nimmt α_h nicht zu, α'_h nicht ab, es haben daher beide Grössen Grenzwerthe für $h = 0$. Wir setzen

$$\beta = \lim_{h=0} \alpha_h \quad \text{und} \quad \beta' = \lim_{h=0} \alpha'_h$$

und sagen, *die Richtung der Curve schwanke* in der Umgebung der Stelle x, y zwischen β und β'. Die Differenz $\beta - \beta'$ heisse *Richtungsschwankung der Curve in der Umgebung der Stelle* x, y. (2)

Schliesslich nennen wir *Gesammtschwankung der Richtung im Inneren eines Intervalles* die Grösse $\gamma - \gamma'$, wenn γ die obere Grenze von α, γ' die untere Grenze von α' im Inneren des Intervalles ist.

---

(1) Herr du Bois-Reymond nennt die Grössen D^+, D_+, D^-, D_- passend »Unbestimmtheitsgrenzen« des vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten. Wir haben die neue Bezeichnung »derivirte Funktionen« der grösseren Kürze wegen eingeführt. Die Symbole D^+, D_+, D^-, D_- schliessen sich unmittelbar an diese Bezeichnung an und sind daher von uns den Symbolen des Herrn Dini Λ, λ, Λ', λ' (*Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* pag. 190) vorgezogen.

(2) Die Richtungsschwankung an der Stelle x, y ist keineswegs immer gleich der Richtungsschwankung in der Umgebung dieser Stelle. Es lassen sich leicht Beispiele angeben, wo die erste gleich 0, die zweite gleich π ist (z. B. $y = x^{\frac{1}{3}} \sin\frac{1}{x}$ für $x = 0$).

2.

Theorem I. Ist die in dem Intervall $x_0 x_1$ *überall eindeutig gegebene Funktion* $f(x)$ *stetig und bleiben alle Grössen* L_n *bei irgend einer Wahl der Theilpunkte unterhalb einer endlichen Grösse G, so bleiben sie auch bei jeder anderen Wahl der Theilpunkte unterhalb dieser Grösse, und* L_n *hat für* $n = \infty$ *den von der Wahl der Theilpunkte unabhängigen Grenzwerth L. Die durch die Gleichung* $y = f(x)$ *definirte Curve hat also in diesem Falle zwischen den Punkten* x_0, y_0 *und* x_1, y_1 *die bestimmte Länge L.*(¹)

Theorem II. Ist die in dem Intervall $x_0 x_1$ *überall eindeutig gegebene Funktion* $f(x)$ *unstetig, so ist für die Existenz einer Länge, d. h. eines von der Wahl der Theilpunkte unabhängigen endlichen Grenzwerthes* $\lim_{n=\infty} L_n = L$ *nothwendig, 1) dass für jeden dem Intervall angehörigen Werth* x *die Grössen* $f(x + \varepsilon)$ *und* $f(x - \varepsilon)$ *mit verschwindendem* ε *sich bestimmten endlichen Grenzwerthen* $f(x + 0)$ *und* $f(x - 0)$ *nähern; 2) dass für jeden Werth von* x *der Werth der Funktion* $f(x)$ *zwischen* $f(x + 0)$ *und* $f(x - 0)$ *liegt oder mit einer dieser Grössen zusammenfällt; 3) dass die Werthe* x, *für welche* $f(x + 0)$ *nicht gleich* $f(x - 0)$ *ist, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden;*(²) *4) dass die Summe der absoluten Beträge der Differenzen* $f(x + 0) - f(x - 0)$ *endlich ist. Sind umgekehrt diese vier Bedingungen erfüllt, so hat die durch die Gleichung* $y = f(x)$ *definirte Curve eine Länge L, wenn die Grössen* L_n *bei irgend einer Wahl der Theilpunkte unterhalb einer endlichen Grösse G bleiben.*

(¹) Der von DUHAMEL gegebene Beweis dieses Theorems umfasst nur diejenigen Curven, welche an jeder Stelle sowohl nach vorwärts, als nach rückwärts eine bestimmte Richtung haben. Desgl. der Beweis von Herrn STOLZ (l. c. pag. 271).

(²) Unter einer »abzählbar unendlichen» Menge verstehn wir eine solche, deren Elemente sich den Elementen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, ... eindeutig zuordnen lassen. Wir bemerken dies ausdrücklich, weil Herr G. CANTOR jenem Begriffe, den er ursprünglich in der angegebenen Weise definirte, später eine erweiterte Bedeutung gegeben hat (Mathematische Annalen, B. 21, pag. 550, Note).

Es sei noch erwähnt, dass die im Theorem II enthaltene Bedingung 3), genau genommen, überflüssig ist, da sie — was wir erst während des Druckes erkannt haben — durch die Bedingung 1) bereits mitgegeben ist. Die von Herrn DU BOIS-REYMOND (l. c.) aufgestellte Forderung, dass die Unstetigkeiten nicht »pantachisch» sein sollen, erweist sich bei unserer Definition der Länge als unwesentlich (Vergl. das Beispiel auf S. 61 dieser Abhandlung).

Beweis von Theorem I.

Es entspreche irgend einer Wahl der Theilpunkte die Reihe $L_1, L_2, \ldots$ Nach Voraussetzung sind alle in dieser Reihe vorkommenden Grössen kleiner als G. Da ausserdem allgemein $L_{n+1} \geq L_n$ ist, müssen die Grössen L_n, wie schon in § 1 bemerkt wurde, eine obere Grenze haben, der sie sich beliebig nähern, die sie indess nicht überschreiten. Diese Grenze sei L.

Wir nehmen nun irgend welche anderen Theilpunkte an und bezeichnen die denselben entsprechenden Grössen mit gestrichenen Buchstaben: $x'_{n0}, x'_{n1}, \ldots, y'_{n0}, y'_{n1}, \ldots, L'_n$. Es lässt sich zeigen, dass keine der Grössen L'_n grösser als L sein kann.

Sind $x'_{n0}, x'_{n1}, \ldots, x'_{n,p+1}$ die der Grösse L'_n entsprechenden Theilpunkte (also $x'_{n0} = x_0$, $x'_{n,p+1} = x_1$), so ist nach der Definition

$$L'_n = \sum_{r=0}^{p} \sqrt{(x'_{n,r+1} - x'_{n,r})^2 + (y'_{n,r+1} - y'_{n,r})^2}.$$

Nehmen wir jetzt eine positive Grösse δ beliebig an, so können wir zu jeder Grösse $x'_{nr} (r = 1, 2, \ldots, p)$ vermittelst einer Ungleichung

$$x'_{nr} - \varepsilon_r < x < x'_{nr} + \eta_r$$

ein Intervall i_{nr} bestimmen, welches erstens eine von 0 verschiedene Länge besitzt, die kleiner als $\frac{\delta}{p}$ ist, welches zweitens keinen der Punkte $x'_{n0}, x'_{n1}, \ldots$ ausser x'_{nr} enthält, und innerhalb dessen drittens die Schwankung von $f(x)$ kleiner als $\frac{\delta}{p}$ ist. Ist dies geschehen, so können wir ferner die Zahl m so gross annehmen, dass in jedem der p Intervalle $i_{n1}, i_{n2}, \ldots, i_{np}$ mindestens zwei Punkte der Reihe $x_{m1}, x_{m2}, \ldots$ liegen. Dann wird folgende Relation bestehen:

$$L_m + 2\sqrt{2}\delta > L'_n.$$

Sind nämlich $x_{m,\alpha}$ und $x_{m,\alpha+1}$ zwei auf einander folgende Punkte der Reihe $x_{m1}, x_{m2}, \ldots$, welche beide im Intervall i_{nr} liegen, und ersetzen wir

in dem Summenausdruck für L_m das Glied, welches die Entfernung des Punktes $x_{m\alpha}$, $y_{m\alpha}$ vom Punkte $x_{m,\alpha+1}$, $y_{m,\alpha+1}$ ausdrückt, durch die Summe der Entfernungen dieser beiden Punkte vom Punkte x'_{nr}, y'_{nr}; und führen wir dasselbe für alle p Intervalle i_{nr} aus, so erfährt die Summe L_m einen Zuwachs, der kleiner als $2\sqrt{2}\delta$ ist. Die neue Summe ist aber mindestens gleich L'_n, da an der Stelle der geraden Linien, aus deren Längen L'_n zusammengesetzt ist, hier gebrochene Linien stehen. Demnach gilt in der That die Relation

$$L_m + 2\sqrt{2}\delta > L'_n .$$

Da L nicht kleiner als L_m ist, muss um so mehr

$$L + 2\sqrt{2}\delta > L'_n$$

werden. Die Grösse δ war aber beliebig angenommen. Also ist auch

$$L \geqq L'_n .$$

Hieraus folgt in Verbindung mit der Relation $L'_{n+1} \geqq L'_n$, dass die Grössen L'_n mit wachsendem n sich einem bestimmten Grenzwerth L' nähern. Wegen der eben gefundenen Relation kann L' nicht grösser als L sein. Da wir aber jetzt offenbar in den vorhergehenden Betrachtungen die gestrichenen und die ungestrichenen Buchstaben mit einander vertauschen dürfen, folgt, dass auch L nicht grösser als L' ist. Also ist $L = L'$.

Hiermit ist das Theorem I bewiesen.

Beweis von Theorem II.

Dass die Bedingungen 1) bis 4) für die Existenz einer Länge nach unserer Definition nothwendig sind, ist unschwer zu erkennen.

Angenommen, es sei $\lim_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon)$ für irgend einen Werth von x unbestimmt. Dann lässt sich eine von 0 verschiedene Grösse c angeben von der Art, dass nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl ε stets eine noch kleinere Zahl ε_1 zu finden ist, für welche der absolute Betrag der Differenz $f(x+\varepsilon) - f(x+\varepsilon_1)$ grösser als c wird. Gehen wir nun von einer Zahl ε aus, bestimmen zu derselben ε_1, zu ε_1 auf dieselbe

Weise ε_2 u. s. w., so wird die Grösse L_n, wenn wir $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ als Theilpunkte annehmen, grösser als cn. Es existirt also kein endlicher Grenzwerth $\lim\limits_{n=\infty} L_n$. Hieraus folgt die Nothwendigkeit der Bedingung 1).

Hat $f(x)$ an irgend einer Stelle einen Werth, der um die von o verschiedene Grösse c grösser als die grössere der beiden Grössen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ (oder kleiner als die kleinere derselben) ist, so würde, falls $\lim\limits_{n=\infty} L_n = L$ wäre, wenn unter den Theilpunkten der Punkt x nicht vorkommt, durch Einschaltung dieses Punktes $\lim\limits_{n=\infty} L_n = L + 2c$ werden. Der Grenzwerth wäre also von der Wahl der Theilpunkte abhängig. Hieraus folgt die Nothwendigkeit der Bedingung 2).

Wenn wir eine beliebige Zahl c annehmen, so dürfen diejenigen Unstetigkeitsstellen, an welchen der absolute Betrag der Differenz $f(x+0) - f(x-0)$ grösser als c ist, nicht in unendlicher Menge vorhanden sein, da sonst durch Annahme von Theilpunkten $x+\varepsilon$ und $x-\varepsilon$ die Grösse L_n beliebig gross gemacht werden könnte. Die Unstetigkeitsstellen sind also, wenn eine Länge existirt, nach der absoluten Grösse $|s|$ jener Differenz abzählbar. Falls sie in unendlicher Anzahl vorhanden sind, ist die Summe $\sum\limits_{r=1}^{\infty} |s_r|$ endlich, da die Summe $\sum\limits_{r=1}^{n} |s_r|$ offenbar für beliebiges n kleiner als L ist. Hiermit ist die Nothwendigkeit der Bedingungen 3) und 4) nachgewiesen.

Sind aber diese 4 Bedingungen erfüllt, und bleiben bei irgend einer Wahl der Theilpunkte die Grössen L_1, L_2, ... sämmtlich unterhalb einer endlichen Zahl G, so bleiben sie auch bei jeder beliebigen anderen Wahl der Theilpunkte unterhalb dieser Zahl und haben einen von der Wahl der Theilpunkte unabhängigen Grenzwerth L.

Nehmen wir nämlich zunächst an, dass an allen Unstetigkeitsstellen die Funktion $f(x)$ entweder gleich $f(x+0)$ oder gleich $f(x-0)$ sei, so lässt sich der für das Theorem I erbrachte Beweis mit einer unbedeutenden Modifikation auf unseren Fall anwenden. Diese Modifikation besteht darin, dass eine der dort mit ε_r und η_r bezeichneten Grössen gleich Null gesetzt wird, so oft x'_{nr} ein Unstetigkeitspunkt ist: und zwar die Grösse ε_r, wenn $f(x'_{nr}) = f(x'_{nr}+0)$, die Grösse η_r, wenn $f(x'_{nr}) = f(x'_{nr}-0)$ ist.

Hat aber $f(x)$ an den Unstetigkeitsstellen irgend einen zwischen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ gelegenen Werth, so führen wir eine zweite Funk-

tion $f^1(x)$ ein. Dieselbe soll im Allgemeinen gleich $f(x)$ sein und nur an den Unstetigkeitsstellen andere Werthe haben, welche ebenfalls zwischen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ liegen oder auch mit einer dieser Grössen zusammenfallen. Bilden wir dann bei Zugrundelegung *derselben* Theilpunkte der Abscissenaxe die beiden Reihen $L_1, L_2, \ldots$ und $L_1^1, L_2^1, \ldots$, so ist $\lim\limits_{n=\infty}(L_n^1 - L_n) = 0$.

Es sei nämlich δ eine beliebig kleine Zahl. Die Unstetigkeitspunkte seien nach der absoluten Grösse der Sprünge s, d. h. der Differenzen $f(x+0) - f(x-0)$, geordnet. Dann kann p so bestimmt werden, dass $\sum\limits_{r=p+1}^{\infty} |s_r| < \delta$ wird. Wir bezeichnen die den Sprüngen $s_1, s_2, \ldots, s_p$ entsprechenden Werthe von x mit $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Nun sind offenbar in den Summenausdrücken für L_n und L_n^1 nur diejenigen Glieder von einander verschieden, welche die Entfernung E eines Unstetigkeitspunktes von einem anderen Punkte der Curve (der auch Unstetigkeitspunkt sein kann) ausdrücken. Die Differenz zweier entsprechenden Glieder von L_n und L_n^1 ist aber höchstens gleich $|s| + |s'|$, wenn s und s' die den Endpunkten von E entsprechenden Sprünge sind. Demnach ist die Differenz von L_n und L_n^1 nicht grösser als 2δ plus der Summe der absoluten Beträge derjenigen Differenzen

$$\begin{aligned}&\left[\sqrt{(x_{n,r}-x_{n,r-1})^2+(y_{n,r}-y_{n,r-1})^2}+\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{n,r})^2+(y_{n,r+1}-y_{n,r})^2}\right]\\-&\left[\sqrt{(x_{n,r}-x_{n,r-1})^2+(y^1_{n,r}-y^1_{n,r-1})^2}+\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{n,r})^2+(y^1_{n,r+1}-y^1_{n,r})^2}\right],\end{aligned}$$

in welchen $x_{n,r}$ einen der Werthe $x_1, x_2, \ldots, x_p$ hat. Es ist aber leicht sichtbar, dass n_1 so bestimmt werden kann, dass für $n \geqq n_1$ diese letztere Summe, welche höchstens aus p Gliedern besteht, kleiner als δ wird. Man braucht nur n_1 so gross anzunehmen, dass für $n \geqq n_1$ jedes Glied kleiner als $\frac{\delta}{p}$ wird, was immer möglich ist. Demnach wird für $n \geqq n_1$

$$|L_n^1 - L_n| < 3\delta.$$

δ war aber willkürlich. Folglich ist

$$\lim_{n=\infty}(L_n^1 - L_n) = 0.$$

Bleibt nun, was in Theorem II vorausgesetzt wird, bei irgend einer Wahl der Theilpunkte L_n unterhalb der endlichen Zahl G, so ist $\lim_{n=\infty} L_n$ bestimmt und gleich L. Also wird, da $\lim(L_n^1 - L_n) = 0$ ist, auch $\lim L_n^1 = L$. Geben wir $f^1(x)$ an den Unstetigkeitsstellen den Werth $f(x+0)$, so wird, wie vorher gezeigt, bei jeder anderen Wahl der Theilpunkte ebenfalls $\lim(L_n^1) = L$. Folglich wegen der Relation

$$\lim[(L_n^1) - (L_n)] = 0$$

wiederum auch $\lim(L_n) = L$. D. h. der Werth von $\lim L_n$ ist von der Wahl der Theilpunkte unabhängig.

Hiermit ist das Theorem II in allen Stücken bewiesen.

3.

Die Untersuchungen über die Existenz der Länge unstetiger Funktionen lassen sich auf Untersuchungen über stetige Funktionen zurückführen. Hierzu dient das folgende

Theorem III. Wenn die im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutig gegebene unstetige Funktion $f(x)$ den im Theorem II gestellten Bedingungen 1) bis 4) genügt, so definiren wir eine Funktion $\varphi(x) = \sum_{x_0}^{x} s$, wo die Summe sich über alle diejenigen Sprünge $s = f(x'+0) - f(x'-0)$ erstreckt, für welche $x_0 \leqq x' < x$ ist, wozu für den Fall, dass x selbst eine Unstetigkeitsstelle ist, noch die Differenz $f(x) - f(x-0)$ hinzutritt. Dann hat die durch die Gleichung $y = f(x)$ definirte Curve zwischen den Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 eine Länge L oder nicht, je nachdem die stetige Curve $y = \bar{y} = f(x) - \varphi(x)$ eine Länge $\bar{\mathrm{L}}$ hat oder nicht; und zwar ist im ersten Falle

$$L = L + \sum_{x_0}^{x_1} |s|.$$

Beweis von Theorem III.

Ausser der Funktion $\varphi(x) = \sum_{x_0}^{x} s$ definiren wir eine zweite Funktion $\psi(x) = \sum |s|$, welche sich von $\varphi(x)$ nur dadurch unterscheidet, dass die absoluten Werthe der Sprünge s an Stelle ihrer algebraischen Werthe stehen. Ferner bezeichnen wir, wenn in der Summe

$$\varphi(x_1) = \sum_{r=1,2\ldots} s_r$$

die Sprünge s nach ihrer absoluten Grösse geordnet sind, mit $\varphi_p(x_1)$ die Summe $\sum\limits_{r=p+1,p+2\ldots} s_r$, mit $\varphi_p(x)$ denjenigen Bestandtheil von $\varphi(x)$, welcher nur aus Gliedern der Reihe $\varphi_p(x_1)$ zusammengesetzt ist. Die entsprechende Bedeutung von $\psi_p(x)$ ist klar. Es sei schliesslich

$$y_p = f(x) - [\varphi(x) - \varphi_p(x)].$$

Nehmen wir jetzt drei Punkte A, B, C, resp. mit den Coordinaten x, $\bar{y}$; x', $\bar{y} + y'_p - y_p$; x', $\bar{y}'$ an, so wird

$$AB - BC \leqq AC \leqq AB + BC.$$

Ist $x' > x$, so wird BC jedenfalls nicht grösser als $\psi_p(x') - \psi_p(x)$, und wir können die vorstehende Relation in die Form setzen:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x'-x)^2 + (y'_p - y_p)^2} - [\psi_p(x') - \psi_p(x)] \\ \leqq \sqrt{(x'-x)^2 + (\bar{y}' - \bar{y})^2} \leqq \\ \sqrt{(x'-x)^2 + (y'_p - y_p)^2} + [\psi_p(x') - \psi_p(x)].\end{aligned}$$

Geben wir x den Werth $x_{n,r}$, x' den Werth $x_{n,r+1}$ und summiren nach r, so ergiebt sich hieraus, wenn L_n^p und $\bar{L}_n$ die den Curven $y = y_p$ und $y = \bar{y}$ entsprechenden Grössen L_n sind, die Relation

$$L_n^p - \psi_p(x_1) \leqq \bar{L}_n \leqq L_n^p + \psi_p(x_1).$$

Dieselbe gilt bei ganz beliebiger Wahl der Theilpunkte für jeden Werth von n und jeden Werth von p.

Wird zunächst $p = 0$ gesetzt, so geht y_p über in $f(x)$, L_n^p in L_n, $\psi_p(x_1)$ in $\psi(x_1)$, und man erkennt, dass die Curve $y = f(x)$ eine bestimmte Länge L hat oder nicht, je nachdem die Curve $y = \overline{y}$ eine bestimmte Länge $\bar{L}$ hat oder nicht. Besitzt nämlich die letztere Curve die Länge L, so ist wegen der vorstehenden Relation keine der Grössen L_n grösser als $L + \psi(x_1)$, die Grössen L_n haben also nach Theorem II einen bestimmten, von der Wahl der Theilpunkte unabhängigen Grenzwerth L. Hat umgekehrt die Curve $y = f(x)$ die Länge L, so ist keine der Grössen $\bar{L}_n$ grösser als $L + \psi(x_1)$ und es folgt wiederum, dass die Curve $y = \overline{y}$ eine bestimmte Länge $\bar{L}$ hat.

Die vorstehende Relation zeigt aber auch, dass der Werth von L, falls ein solcher existirt, sich um keine angebbare Grösse von $\bar{L} + \psi(x_1)$ unterscheiden kann. Denn wenn wir δ beliebig klein annehmen, kann p_1 immer so gewählt werden, dass für $p > p_1$, $\psi_p(x_1) < \delta$ wird. Es werden demnach die Grössen L^p und $\bar{L}$ wegen der vorstehenden Relation eine Differenz haben, die absolut kleiner als δ ist. Andererseits ist

$$L = L^p + \sum_{r=1}^{p} |s_p| = L^{(p)} + \psi(x_1) - \psi_p(x_1),$$

was unmittelbar ersichtlich ist, wenn man die Curve $y = f(x)$ an denjenigen p Stellen, welche den Sprüngen $s_1, s_2, \ldots, s_p$ entsprechen, zerschneidet und die Stücke einzeln mit den entsprechenden Stücken der Curve $y = y_p$ vergleicht. Da hiernach jede der beiden Grössen $\bar{L} + \psi(x_1)$ und L sich um weniger als δ von der Grösse $L^p + \psi(x_1)$ unterscheidet, können dieselben von einander höchstens um 2δ verschieden sein. D. h. sie sind einander gleich, da δ beliebig klein angenommen war. Es besteht also die Gleichung

$$L = \bar{L} + \psi(x_1) = \bar{L} + \sum^{x_1} |s|.$$

Hiermit ist das Theorem III vollständig bewiesen.

Beispiel zu Theorem III.

Es sei $w_1, w_2, \ldots$ eine abzählbar unendliche Menge beliebiger Grössen, $s_1, s_2, \ldots$ eine abzählbare Menge positiver Grössen, deren Summe endlich

und gleich S sei. Dann wird eine Curve definirt durch die Gleichung $y = \sum_{-\infty}^{x} s_r$, in welcher die Summe über alle diejenigen Indices r zu erstrecken ist, für welche $w_r < x$ ist.

Diese Curve hat nach Theorem III zwischen je zwei Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 die Länge $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$. Besonders merkwürdig erscheint diese Eigenschaft in dem Falle, wo die Punktmenge w_1, w_2, ... überall-dicht ist.(¹) Dann nämlich unterscheidet die Curve sich von den gewöhnlichen treppenförmigen Curven, welchen die genannte Eigenschaft zukommt, dadurch, dass sie keine einzige horizontale Linie von angebbarer Länge enthält. Wir kommen auf diese Curven in der nächsten Nummer noch zurück.

4.

Theorem IV. Es seien G und G' zwei Zahlen, von denen wenigstens eine endlich ist, $G \geqq G'$. Wenn dann die beiden vorderen (hinteren) Derivirten der stetigen Funktion $f(x)$ für alle inneren Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ zwischen G und G' einschliesslich liegen, so hat die Curve $y = f(x)$ von x_0 bis x_1 eine bestimmte endliche Länge L. Ist $\bar{G}$ eine beliebige positive Grösse, welche nur in dem Falle, dass G und G' verschiedene Vorzeichen haben, nicht kleiner als der kleinere absolute Werth von G und G' sein darf, so ist

$$L \leqq 2\sqrt{1 + \bar{G}^2}(x_1 - x_0) + \sqrt{\frac{1}{\bar{G}^2} + 1} \cdot |y_1 - y_0|.$$

Ist $\bar{G}$ grösser als die beiden absoluten Werthe von G und G', so ist ausserdem

$$L < \sqrt{1 + \bar{G}^2}(x_1 - x_0).$$

Haben G und G' gleiches Vorzeichen, und ist $\bar{G}$ kleiner als die beiden absoluten Werthe von G und G', so ist endlich

$$L < \sqrt{\frac{1}{\bar{G}^2} + 1} \cdot |y_1 - y_0|.$$

(¹) Herr G. Cantor hat z. B. gezeigt (Borchardt's Journal, B. 77 p. 258), dass die Menge aller rationalen Zahlen und sogar aller algebraischen Zahlen, welche offenbar überall dicht ist, in eine einfache Reihe w_1, w_2, ... gebracht werden kann.

Theorem V. Es sei g eine positive endliche Zahl, G und G' zwei Zahlen, von denen wenigstens eine endlich ist. Wenn dann die willkürliche Funktion $f(x)$ für alle Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ absolut kleiner als g ist, während die vier Derivirten an allen inneren Punkten des Intervalles $x_0 x_1$ zwischen G und G' einschliesslich liegen, so hat die Curve $y = f(x)$ von x_0 bis x_1 eine bestimmte endliche Länge L. Ist $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1 stetig, so liegt L unterhalb der im Theorem IV angegebenen Grenzen.

Das Theorem V kann mit Anwendung des in § 1 definirten Ausdruckes »Richtungsschwankung« auch folgendermassen formulirt werden:

Theorem Va. Wenn die willkürliche Funktion $f(x)$ für alle Werthe x von x_0 bis x_1 (einschliesslich) absolut kleiner als eine endliche Zahl g ist, und wenn die Gesammtschwankung c der Richtung der Curve $y = f(x)$ im Inneren des Intervalles $x_0 x_1$ kleiner als π ist, so hat die Curve von x_0 bis x_1 eine bestimmte endliche Länge L. Ist $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1 stetig, so wird für $c' \geqq c$

$$L \leqq 2(x_1 - x_0) \sec\frac{c'}{2} + |y_1 - y_0| \operatorname{cosec}\frac{c'}{2}.$$

Beweis eines Hülfssatzes.

Wenn die beiden vorderen (hinteren) Derivirten der stetigen Funktion $f(x)$ an keiner inneren Stelle des Intervalles $x_0 x_1$ grösser als die endliche Zahl G sind, so ist bekanntlich auch der Quotient

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

niemals grösser als G, welche im Inneren oder auf der Grenze des Intervalles $x_0 x_1$ gelegenen Werthe man auch für x und x' annehmen mag.

Lassen wir die Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$ fallen, nehmen dagegen an, dass sowohl die vorderen, als die hinteren Derivirten im Inneren des Intervalles an keiner Stelle grösser als G seien, so besteht ebenfalls die Relation $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G$; nur dass die Werthe x_0 und x_1 für x und x' ausgeschlossen bleiben. Der Beweis, welcher für das Theorem V wichtig ist, gestaltet sich folgendermassen.

Es sei $\varphi(x) = (G + \delta)x - f(x)$, wo δ eine beliebige positive Constante ist. Dann sind die 4 Derivirten von $\varphi(x)$ an jeder inneren Stelle des Intervalles $x_0 x_1$ positiv. Wäre nun für irgend zwei Werthe x und x', deren grösserer x' sei, die Differenz $\varphi(x') - \varphi(x)$ negativ, so würden die zwischen x und x' gelegenen Werthe x, für welche $\varphi(x') - \varphi(x) \leqq 0$ ist, eine obere Grenze x'' haben. Es wäre dann entweder $\varphi(x') - \varphi(x'') < 0$ oder $\varphi(x') - \varphi(x'') \geqq 0$. Im ersten Falle wäre $x'' < x'$ und es würden gegen die Annahme die vorderen Derivirten von $\varphi(x)$ an der Stelle x'' nicht positiv sein, da $\varphi(x'' + h) - \varphi(x'')$ für alle positiven Werthe $h < x' - x''$ negativ würde. Im letzten Falle müssten beliebig kleine negative Werthe h existiren, wofür $\varphi(x') - \varphi(x'' + h)$ und um so mehr $\varphi(x'') - \varphi(x'' + h)$ nicht positiv würde, was mit der Voraussetzung positiver hinterer Derivirten an der Stelle x'' unverträglich wäre. Es ist also $\frac{\varphi(x') - \varphi(x)}{x' - x} \geqq 0$, und folglich, da δ beliebig war,

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G.$$

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich leicht folgender

Hülfssatz. Bedeuten G und G' zwei Zahlen, von denen wenigstens eine endlich ist, so liegt der Quotient $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ *zwischen G und G', wenn für den Fall, dass* $f(x)$ *stetig ist, die beiden vorderen (hinteren), für den allgemeinen Fall alle vier Derivirten an allen inneren Punkten des Intervalles* $x_0 x_1$ *zwischen G und G' liegen.* x *und* x' *können beliebige innere Werthe des Intervalles* $x_0 x_1$*, und für den Fall, dass* $f(x)$ *stetig ist, auch die Grenzwerthe* x_0 *und* x_1 *annehmen.*

Beweis von Theorem IV.

Aus den im Theorem gemachten Voraussetzungen ergiebt sich mit Benutzung des eben bewiesenen Hülfssatzes die Relation

$$G' < \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x < x_1.$$

Wir bilden nach den in § 1 gegebenen Vorschriften die Grösse

$$L_n = \sum_{r=0,1,\dots} \sqrt{(x_{n,r+1} - x_{n,r})^2 + (y_{n,r+1} - y_{n,r})^2}.$$

Ist dann G eine positive endliche Zahl, welche der im Theorem IV angegebenen Bedingung genügt, so trennen wir die Glieder der Summe L_n in zwei Gruppen. Zur ersten Gruppe rechnen wir diejenigen, für welche der absolute Werth des Quotienten

$$\frac{y_{n,r+1} - y_{n,r}}{x_{n,r+1} - x_{n,r}}$$

höchstens gleich G ist, zur zweiten Gruppe die übrigen. Wir nennen die Summe aller Glieder der ersten Gruppe L_n', die Summe der übrigen Glieder L_n''.

Offenbar ist

$$L_n' \leqq (x_1 - x_0)\sqrt{1 + \overline{G}^2},$$

und

$$-\overline{G}(x_1 - x_0) \leqq \Sigma'(y_{n,r+1} - y_{n,r}) \leqq \overline{G}(x_1 - x_0),$$

wenn die Summe Σ' über die zur ersten Gruppe gehörigen Glieder erstreckt wird.

Die Glieder der Summe

$$\Sigma''(y_{n,r+1} - y_{n,r}),$$

welche sich auf die zweite Gruppe bezieht, haben sämmtlich dasselbe Vorzeichen, die Summe selbst ist gleich $y_1 - y_0 - \Sigma'$, ihr absoluter Werth also jedenfalls nicht grösser als $|y_1 - y_0| + \overline{G}(x_1 - x_0)$. Demnach wird

$$L_n'' \leqq [|y_1 - y_0| + \overline{G}(x_1 - x_0)]\sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2} + 1}.$$

Es ist schliesslich

$$L_n = L_n' + L_n'' \leqq \sqrt{1 + \overline{G}^2}\left(2(x_1 - x_0) + \frac{|y_1 - y_0|}{\overline{G}}\right).$$

Diese Relation lehrt, dass die Grössen L_n niemals eine gewisse endliche Grenze überschreiten. Nach Theorem I existirt also eine Länge L, welche nicht grösser als die in der vorstehenden Relation angegebene obere Grenze für L_n ist.

Sind beide Zahlen G und G' endlich, und wird für $\overline{G}$ eine Zahl angenommen, die nicht kleiner als der grössere absolute Werth jener Zahlen G und G' ist, so enthält die Gruppe L''_n kein einziges Glied, es wird daher $L_n = L'_n$, und wir erhalten die Relation

$$L \leqq (x_1 - x_0)\sqrt{1 + \overline{G}^2}.$$

Haben G und G' gleiches Vorzeichen, und ist $\overline{G}$ absolut kleiner als beide, so enthält die Gruppe L'_n kein Glied, und es wird

$$L < (y_1 - y_0)\sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2} + 1}\,.$$

Beweis von Theorem V.

Aus den im Theorem V gemachten Voraussetzungen ergiebt sich die Relation

$$G' \leqq \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G \quad \text{für} \quad x_0 < x < x_1\,.$$

Nehmen wir nun zunächst an, dass $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1 stetig sei, so gilt diese Relation auch noch, wenn x und x' die Werthe x_0 und x_1 annehmen. Dann lässt sich der eben für das Theorem IV gegebene Beweis in unveränderter Form anwenden.

Ist aber $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1 unstetig, so ist aus den im Theorem gemachten Voraussetzungen leicht ersichtlich, dass $f(x_0 + 0)$ und $f(x_1 - 0)$ bestimmte Werthe haben. Wir bilden dann die Funktion $f^1(x)$, welche sich nur dadurch von $f(x)$ unterscheidet, dass sie an den Stellen x_0 und x_1 resp. die Werthe $f(x_0 + 0)$ und $f(x_1 - 0)$ annimmt. Die Curve $y = f^1(x)$ hat eine Länge, folglich auch die Curve $y = f(x)$.

Beispiele zu Theorem IV.

1. Es sei $w_1, w_2, \ldots$ die Menge aller rationalen Zahlen.[1] Der Reihe $w_1, w_2, \ldots$ ordnen wir eine Reihe positiver Grössen $c_1, c_2, \ldots$ so zu, dass die Summe

---

[1] Cf. die Note auf Seite 62.

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r (x - w_r)^{\frac{1}{3}}$$

für alle Werthe x von x_0 bis x_1 gleichmässig convergirt.[1] Man erreicht dies z. B., indem man $c_r = \frac{1}{(p_r + q_r)^3}$ setzt, wenn $\pm \frac{p_r}{q_r}$ die irreductible Form von w_r ist. Die Funktion $f(x)$ ist dann stetig und nimmt mit x beständig zu, die vorderen Derivirten liegen also immer zwischen 0 und $+\infty$. Die Voraussetzungen von Theorem IV sind hiermit erfüllt, und es folgt, dass die Curve zwischen je zwei Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 eine bestimmte Länge hat. Das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

durch welches die Länge ausgedrückt zu werden pflegt, ist in diesem Falle vollständig sinnlos; denn ohne über die Derivirten von $f(x)$ specielle Untersuchungen anzustellen, erkennen wir unmittelbar, dass an allen Stellen $x = w_r$ ein Differentialquotient existirt und den Werth $+\infty$ hat.

2. Als Beispiel zu Theorem III hatten wir eine unstetige Funktion $f(x) = \sum_{-\infty}^{x} s_r$ definirt. Da diese Funktion mit x beständig wächst, vorausgesetzt, dass die Punktmenge $w_1, w_2, \ldots$ überall dicht ist, entspricht jedem Werthe von y höchstens ein Werth von x. Lassen wir die Funktion an den Unstetigkeitsstellen in der Weise unbestimmt, dass sie daselbst jeden Werth von $f(x - 0)$ bis $f(x + 0)$ annehmen darf, so entspricht jedem Werthe von y (innerhalb gewisser Grenzen) wirklich ein Werth von x. Die Umkehrung der Funktion $f(x)$ ist also eine überall bestimmte eindeutige und, wie leicht erkennbar, stetige Funktion. Bezeichnen wir dieselbe mit φ, so wird durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ eine stetige Curve definirt. Dieselbe genügt den Voraussetzungen des Theorems IV, woraus die Existenz einer Länge von Neuem hervorgeht.

Die Funktion $\varphi(x)$ hat sehr merkwürdige Eigenschaften. Erstens giebt es in jedem noch so kleinen Intervall $x_0 x_1$ nicht nur einzelne Stellen,

---

[1] Diese Summe ist von Herrn Weierstrass angegeben worden. Cf. Cantor, *Condensation der Singularitäten*, Mathematische Annalen B. 19, pag. 591.

sondern ganze Strecken, in denen der Differentialquotient beständig Null ist. Zählt man diese Strecken nach ihrer Grösse ab und addirt sie, so zeigt es sich, dass die Summe um keine angebbare Grösse von der Länge $x_1 - x_0$ des ganzen Intervalles verschieden sein kann. (1) Dennoch würde man offenbar sehr irren, falls man glaubte, die Länge der Curve sei gleich dem bestimmten Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2},$$

wenn darin $\varphi'(x) = 0$ gesetzt wird. Die Länge ist vielmehr, wie wir in § 3 sahen, gleich $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$ und kann durch jenes bestimmte Integral überhaupt nicht ausgedrückt werden.

Beispiel zu Theorem V.

Es werde mit (x) die Differenz $x - n$ bezeichnet, wo n die x nächstgelegene (grössere oder kleinere) ganze Zahl ist; für $x = n + \frac{1}{2}$ sei $(x) = 0$. Wir bilden die Funktion (2)

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(rx)}{r^3}.$$

Die Curve $y = f(x)$ hat dann zwischen je zwei Punkten x_0 und x_1 eine Länge; denn es ist offenbar für $x' > x$

$$(rx') - (rx) \leqq r(x' - x),$$

also

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq \frac{\pi^2}{6}.$$

---

(1) Diese Funktion zeigt, dass ein Lehrsatz des Herrn Harnack (Mathematische Annalen B. 19, pag. 235—279, Lehrsatz 3) nicht unbedingt richtig ist.

(2) Vergl. Riemann: *Über die Darstellbarkeit einer F. d. e. trigon. Reihe.* Ges. Werke, pag. 228.

Die 4 derivirten Funktionen sind also an keiner Stelle grösser als $\frac{\pi^2}{6}$, und die Bedingungen von Theorem V sind erfüllt, wenn $G = \frac{\pi^2}{6}$, $G' = -\infty$ angenommen wird.

Diese Funktion ist dadurch interessant, dass sie in jedem Intervall unendlich oft zu- und abnimmt. Da sie überdies in jedem Intervall unendlich oft unstetig ist, würde die Existenz einer Länge vermittelst der bisher bekannten Methoden garnicht nachzuweisen gewesen sein.

Das Theorem III bietet genügende Hülfsmittel, um die Länge dieser Curve zwischen zwei beliebigen Punkten x_0 und x_1 wirklich zu berechnen. Es ist nämlich bei Anwendung der dort gebrauchten Bezeichnungen

$$L' = \frac{\pi^2}{6}(x_1 - x_0)$$

$$L = L' + \varphi(x_1) - \varphi(x_0)$$

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(r)}{r^3}.$$

$\lambda(r)$ bedeutet hier die Anzahl der ungeraden Zahlen, die zwischen $2rx_0$ und $2rx_1$ liegen, vermehrt um $\frac{1}{2}$, falls eine der Grössen $2rx_0$ und $2rx_1$ selbst eine ungerade Zahl ist, um 1, falls jene Grössen beide ungerade Zahlen sind.

Es wird also schliesslich

$$L = \frac{\pi^2}{6}(x_1 - x_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(r)}{r^3}.$$

5.

Theorem VI. Wenn die Funktion $f(x)$ zwischen x_0 und x_1 entweder stetig ist oder den Bedingungen 1) bis 4) von Theorem II genügt; wenn ferner eine endliche oder unendliche Schaar von Intervallen $i_r = x_r'' - x_r'$ $(r = 1, 2, \ldots)$ bestimmt wird, die sämmtlich ausser einander liegen und das Intervall $x_0 x_1$ so erfüllen, dass alle im Inneren keines einzigen Intervalles i_r gelegenen Punkte P der Strecke $x_0 x_1$ eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden: so sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Curve $y = f(x)$ von x_0 bis x_1 eine Länge besitzt, folgende: Die Curve muss in jedem Intervalle i_r eine Länge l_r besitzen, und die Summe $\sum_r l_r$ muss endlich sein.

In dem Falle, dass $f(x)$ stetig ist, wird die Länge L der ganzen Curve gleich $\sum_r l_r$.

Dass die angegebenen Bedingungen nothwendig sind, ist ohne Weiteres klar. Dass sie hinreichend sind, beweisen wir im Folgenden nur unter Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$, da der allgemeine Fall durch Anwendung des Theorems III sofort auf jenen Fall zurückgeführt werden kann.

Wir brauchen folgenden

Hülfssatz. Werden mit y_r und y_r' die zu x_r und x_r' gehörigen Werthe von y bezeichnet, so gilt unter den im Theorem gemachten Annahmen über die Intervalle i_r für den Fall, dass $f(x)$ stetig und $\sum l_r$ endlich ist, die Gleichung

$$y = \sum_r (y_r'' - y_r') + y - y_\lambda',$$

in welcher r auf der rechten Seite alle diejenigen Werthe annimmt, für welche x_r'' und x_r' kleiner als x ist, während im Falle, dass x innerhalb oder auf der Grenze eines Intervalles i_λ liegt, noch das Glied $y - y_\lambda'$ hinzutritt.

Zunächst ist klar, dass die Summe auf der rechten Seite der Gleichung einen bestimmten endlichen Werth hat; denn offenbar ist der absolute Betrag von $y_r'' - y_r'$ kleiner als l_r, und Σl_r ist nach Voraussetzung endlich. Wir bilden die Funktion

$$\varphi(x) = y - \Big(\sum_{x_0}^{x} (y_r'' - y_r') + y - y_\lambda'\Big).$$

Dieselbe ist stetig, da ihre beiden Bestandtheile stetig sind. Sie ist ferner im Inneren jedes Intervalles i_r constant. Nun sind nach Voraussetzung diejenigen Werthe x, welche in keinem Intervalle i_r liegen, nur in endlicher oder abzählbar unendlicher Menge vorhanden. Folglich kann die Funktion $\varphi(x)$ von x_0 bis x_1 überhaupt nur eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von Werthen annehmen. Sie ist daher nach einem Satze von Herrn CANTOR (¹) constant, und zwar gleich Null, da $\varphi(x_0) = 0$ ist. D. h.

$$y = \sum_{x_0}^{x} (y_r'' - y_r') + y - y_\lambda'.$$

w. z. b. w.

Da, wie schon bemerkt, $y_r'' - y_r'$ absolut kleiner als l_r ist, geht aus dem eben bewiesenen Hülfssatze unmittelbar die Gültigkeit der Relation

(A) $$|y' - y| < \sum_{(x,\,y)}^{(x',\,y')} l_r$$

(für 2 beliebige Punkte x, y und x', y' der Curve) hervor, wo die Summe auf der rechten Seite eine leicht erkennbare Bedeutung hat. Von dieser Relation wird in der Folge Gebrauch gemacht.

Wir schreiten zum

Beweis von Theorem VI

unter Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$.

Es sei $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ endlich. Wir nennen δ eine beliebig kleine positive Grösse. Dann kann p_1 so bestimmt werden, dass für $p \geqq p_1$ sowohl

(¹) *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Mathematische Annalen B. 21, pag. 57).

$\sum_{r=p+1}^{\infty} l_r$ als $\sum_{r=p+1}^{\infty} i_r$ kleiner als δ wird. Nach einem Satze von Herrn CANTOR[1] ist $\sum_{r=1}^{r} i_r = x_1 - x_0$. Es wird also die Summe derjenigen $p+1$ Strecken, welche übrig bleiben, wenn die p Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_p$ aus der Strecke $x_0 x_1$ ausgeschieden werden, ebenfalls kleiner als δ. Wir bezeichnen diese übrig bleibenden Strecken (von denen etliche gleich Null sein können) mit $i'_0, i'_1, \ldots, i'_p$, ihre Anfangs- und Endpunkte respective mit $\xi_0, \xi'_0; \xi_1, \xi'_1; \ldots; \xi_p, \xi'_p$, die entsprechenden Werthe von y mit $\eta_0, \eta'_0; \eta_1, \eta'_1; \ldots; \eta_p, \eta'_p$.

Dann wird

$$\sum_{r=0}^{p} (\xi'_r - \xi_r) = \sum_{r=0}^{p} i'_r < \delta$$

und

$$\sum_{r=0}^{p} |\eta'_r - \eta_r| \leq \sum_{p+1}^{\infty} l_r < \delta.$$

Die letzte dieser beiden Ungleichungen ist eine unmittelbare Folge der vorhin bewiesenen Relation (A), wenn darin für y und y' die Werthe η_r und η'_r gesetzt werden und über r summirt wird. Aus den beiden vorstehenden Relationen folgt

$$\sum_{r=0}^{p} \sqrt{(\xi'_r - \xi_r)^2 + (\eta'_r - \eta_r)^2} < 2\delta.$$

Setzen wir jetzt zuerst $p = p_1$ und bilden nach den in § 1 gegebenen Vorschriften die Grösse L_1, indem wir als Theilpunkte die Punkte $\xi_0, \xi'_0; \xi_1, \xi'_1; \ldots; \xi_p, \xi'_p$ und ausserdem beliebig viele im Inneren der Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_{p_1}$ gelegene Punkte annehmen, so wird offenbar

$$L_1 < 2\delta + \sum_{r=1}^{p_1} l_r.$$

Setzen wir dann zweitens $p = p_2 = p_1 + 1$ und bilden die Grösse L_2, indem wir zu den schon vorhandenen Theilpunkten die beiden Punkte

[1] Mathematische Annalen B. 21, pag. 54.

ξ_{p_2}, ξ'_{p_2} und beliebig viele andere im Inneren von $i_1, i_2, \ldots, i_{p_2}$ gelegene hinzufügen, so wird

$$L_2 < 2\delta + \sum_{r=1}^{p_2} l_r .$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens erhalten wir schliesslich für beliebiges n

$$L_n < 2\delta + \sum_{r=1}^{p_n} l_r .$$

Hieraus ist die Existenz einer oberen Grenze für alle L_n ersichtlich, welche nicht grösser als $2\delta + \sum_{r=1}^{\infty} l_r$ sein kann. Nach Theorem I ist also auch die Existenz einer Länge L erwiesen, die höchstens gleich $2\delta + \sum_{r=1}^{\infty} l_r$ oder, da δ beliebig war, gleich $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ ist. Dass L nicht kleiner als $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ sein kann, ist aber selbstverständlich, da alle l_r Bestandtheile von L sind. Es ist daher

$$L = \sum_{r=1}^{\infty} l_r .$$

w. z. b. w.

Bemerkung zu Theorem VI.

Es liegt hier ein Irrthum sehr nahe. Man könnte nämlich meinen, wenn mit $i_1, i_2, \ldots$ irgend eine unendliche Reihe einander ausschliessender, zwischen x_0 und x_1 gelegener Intervalle bezeichnet wird, deren Summe den Grenzwerth $x_1 - x_0$ hat, wenn ferner die stetige Curve $y = f(x)$ in jedem dieser Intervalle eine bestimmte Länge l_r besitzt, und wenn die Summe $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ einen endlichen Werth L hat, so habe die ganze Curve von x_0 bis x_1 die Länge L. Dies wäre ein Irrthum; denn es giebt nicht nur Curven von der angegebenen Art, deren Länge grösser als L ist, sondern auch solche, die gar keine Länge besitzen. Für jeden Fall ein Beispiel.

1. Es sei $\xi_1, \xi'_1; \xi_2, \xi'_2; \ldots$ (wo allgemein $\xi'_r > \xi_r$) eine unendliche Reihe zwischen x_0 und x_1 gelegener Grössen, die beliebig gewählt und nur der Bedingung unterworfen sein sollen, dass sie alle von einander verschieden sind, dass die Intervalle $i_r = \xi'_r - \xi_r$ einander ausschliessen und dass die Summe $\sum_{r=1}^{\infty} i_r$ gleich $x_1 - x_0$ ist.(1) Es sei ferner $\varphi(x)$ eine von x_0 bis x_1 stetige, sonst aber ganz willkürliche Funktion. Wir definiren dann eine Funktion $f(x)$ folgendermassen. Für alle Werthe x, welche im Innern oder auf der Grenze eines Intervalles i_r liegen, soll $f(x) = \varphi(\xi_r)$ sein; für die übrigen Werthe soll $f(x) = \varphi(x)$ sein. Offenbar ist die Funktion $f(x)$ von x_0 bis x_1 stetig, die Länge der Curve $y = f(x)$ ist aber nicht gleich $\sum l_r$, sondern grösser. Nimmt beispielsweise die Funktion $\varphi(x)$ von x_0 bis x_1 niemals ab, so ist die Länge der Curve von x_0, y_0 bis x_1, y_1 gleich $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$, was man unmittelbar erkennt, wenn man bei Aufstellungen der Grössen L_n nach den in § 1 gegebenen Vorschriften die Punkte ξ_r, ξ'_r als Theilpunkte annimmt und das Theorem I berücksichtigt.

2. Um sich davon zu überzeugen, dass es auch Curven der genannten Art giebt, die gar keine endliche Länge haben, kann man folgende geometrische Betrachtung anstellen. Es sei $x_1 > x_0$ und $y_1 > y_0$. Die Punkte x_0, y_0 und x_1, y_1, die wir mit A und B bezeichnen und durch eine gerade Linie mit einander verbinden, sollen Punkte der zu construirenden Curve sein, die Gerade AB nennen wir erste Näherungsform der Curve. Wir construiren zweitens die 4 Punkte

---

(1) z. B. es bestehe die Reihe ξ_r, ξ'_r aus allen rationalen Zahlen von der Form

$$\xi_r = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{1}{3^p}$$

$$\xi'_r = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{2}{3^p},$$

wo die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$ jeden der beiden Werthe 0 und 2 annehmen und p alle ganzzahligen Werthe von 1 bis ∞ erhält. (Cf. CANTOR, Mathematische Annalen B. 22, pag. 590).

$$x = x_0 + \frac{1}{5}(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \frac{2}{3}(y_1 - y_0);$$

$$x = x_0 + \frac{2}{5}(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \frac{2}{3}(y_1 - y_0);$$

$$x = x_0 + \frac{3}{5}(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \frac{1}{3}(y_1 - y_0);$$

$$x = x_0 + \frac{4}{5}(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \frac{1}{3}(y_1 - y_0);$$

bezeichnen dieselben der Reihe nach mit C, D, E, F und ziehen die 5 Geraden AC, CD, DE, EF, FB. Diese 5 Geraden bilden die zweite Näherungsform der Curve, und zwar sollen die beiden horizontalen Geraden CD und EF Bestandtheile der Curve bleiben. Jede der drei anderen Geraden wird nun wiederum ersetzt durch eine aus 5 Stücken bestehende gebrochene Linie, und zwar nach demselben Gesetze, wie vorher die Linie AB; d. h. wenn wir jetzt die Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes irgend einer jener 3 Geraden mit x_0, y_0 und x_1, y_1 bezeichnen, sollen die Coordinaten von 4 einzuschaltenden Punkten durch die vorher aufgestellten Formeln bestimmt werden. So entsteht die dritte Näherungsform, und wiederum sollen die horizontalen Linien Bestandtheile der Curve bleiben. Setzt man die Construction nach diesem Gesetze in inf. fort, so erhält man als dauernde Bestandtheile der Curve horizontale Linien, deren Gesammtlänge $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ gleich $x_1 - x_0$ ist, da allgemein für die n^{te} Näherungsform $\sum l_r = (x_1 - x_0)\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right)$ ist. Die Differenz der zwei benachbarten Horizontallinien in der n^{ten} Näherungsform entsprechenden Werthe von y ist $(y_1 - y_0)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, hat also den Grenzwerth Null. — Für jeden im Intervall $x_0 x_1$ gelegenen Werth x, dem auf keiner der unendlich vielen Horizontallinien ein Werth y entspricht, bilden wir eine Reihe $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... in inf. von der Beschaffenheit, dass ihre Elemente sich dem Werthe x in inf. nähern, und dass jedem Werthe $x^{(r)}$ ein bestimmter Werth $y^{(r)}$ auf einer der Horizontallinien entspricht. Dann nähert sich

$y^{(n)}$ mit wachsendem n einem bestimmten Grenzwerth, den man etwa durch die CANTOR'sche Fundamentalreihe

$$(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots)$$

ausdrücken kann, und wir setzen $y = \lim_{n=\infty} y^{(n)}$. — Die jetzt vollständig definirte Curve ist von x_0 bis x_1 stetig. Dennoch hat dieselbe nicht etwa die Länge $\sum l_r = x_1 - x_0$, sondern überhaupt keine endliche Länge. Nehmen wir nämlich die Endpunkte der horizontalen Linien der n^{ten} Näherungsform zu Theilpunkten, so wird offenbar

$$(y_1 - y_0)\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} < L_n < x_1 - x_0 + (y_1 - y_0)\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}.$$

L_n wächst also mit n über alle Grenzen.

6.

Wir wollen die Tragweite des Theorems VI etwas näher ins Auge fassen.

Wir behaupten, dass dasselbe in Verbindung mit den vorhergehenden Theoremen Criterien der Existenz oder Nichtexistenz einer Länge für alle diejenigen Curven liefert, für welche sämmtliche Stellen, an denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung (cf. § 1) *gleich π ist, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden.*

Beweis.

Es sei für die Curve $y = f(x)$ im Intervall $x_0 x_1$ die Gesammtheit derjenigen Punkte P, an denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung gleich π ist, endlich oder abzählbar unendlich. Die Punkte P bilden ihrer Natur nach eine abgeschlossene Menge, d. h. alle Punkte

der abgeleiteten(¹) Menge P' sind zugleich Punkte der Menge P. Es lässt sich dann, wie Herr CANTOR gezeigt hat,(²) eine endliche oder unendliche Reihe von Intervallen i_1, i_2, ... bestimmen, deren Endpunkte Punkte der Menge P sind, und welche die Eigenschaft haben, dass die Gesammtheit derjenigen Punkte, welche innerhalb keines der Intervalle i_r liegen, gleich der Gesammtheit aller Punkte P ist.

Dann ist es immer möglich, jedes Intervall i_r in eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Intervallen i_{r1}, i_{r2}, ... zu theilen, in deren jedem die Funktion den Bedingungen der Theoreme IV oder V genügt und also eine Länge l_{r1}, l_{r2}, ... besitzt. Diese Eintheilung, welche auf verschiedene Art vorgenommen werden kann, wird so einzurichten sein, dass sich die Grösse der Längen l_{r1}, l_{r2}, ... vermittelst der Theoreme IV und V möglichst leicht beurtheilen lässt. Hier kommt es vorläufig nur darauf an, die Möglichkeit einer solchen Eintheilung ganz allgemein nachzuweisen. Offenbar wird dieser Nachweis geliefert sein, wenn es gelingt, zu zeigen, dass nach Annahme zweier beliebigen Punkte x_r' und x_r'' *im Inneren* des Intervalles i_r die Strecke $x_r'x_r''$ immer in eine *endliche* Zahl von Intervallen $i_{r\kappa}$ zu theilen ist, in deren jedem die Bedingungen von Theorem IV oder V erfüllt sind.

Wir bezeichnen mit s die grössere der beiden in § 1 definirten Richtungsschwankungen $\alpha - \alpha'$ und $\beta - \beta'$. Offenbar kann s zwischen x_r' und x_r'' einschliesslich an keiner Stelle den Werth π erreichen. Wir behaupten, dass auch die obere Grenze von s im Intervall $x_r'x_r''$ von π verschieden ist. Denn sonst müsste im Inneren oder auf der Grenze der Strecke $x_r'x_r''$ ein Punkt von der Art existiren, dass s in jeder Nähe desselben jeden beliebig wenig von π verschiedenen Werth annimmt. An dieser Stelle wäre also entweder $\alpha - \alpha'$ oder $\beta - \beta'$ gleich π, d. h. s gleich π, was gegen die Annahme ist.

Wir bezeichnen die obere Grenze von s im Intervall $x_r'x_r''$ mit C und nehmen zwei Zahlen G und G' an, erstere positiv und grösser als $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, letztere gleich $-G$. Dann kann die Strecke $x_r'x_r''$ in eine *endliche* Menge von Intervallen getheilt werden, in deren jedem alle vier de-

(¹) Nach der Definition von Herrn CANTOR.

(²) Mathematische Annalen B. 21, pag. 56.

rivirten Funktionen D^+, D_+, D^-, D_- entweder überall nicht grösser als G oder überall nicht kleiner als G' sind.* Denn sonst müsste eine Stelle existiren von der Art, dass in jeder Nähe die Derivirten zum Theil kleiner als G', zum Theil grösser als G würden, d. h. dass $s > C$ wäre; was unmöglich ist.

Wir sehen also, dass die Strecke $x'_r x''_r$ in eine endliche Menge von Intervallen getheilt werden kann, welche den Bedingungen der Theoreme IV oder V genügen, wenn daselbst für G und G' die eben angenommenen Werthe gesetzt werden. Daraus ergiebt sich, wenn wir im Inneren von i_r links von x'_r einen neuen Punkt x'''_r, rechts von x''_r einen neuen Punkt x''''_r beliebig annehmen, die Strecken $x'''_r x'_r$ und $x''_r x''''_r$ wiederum in eine endliche Schaar von Intervallen theilen, u. s. w. fort, dass die Strecke i_r ganz und gar in eine abzählbare Menge von Intervallen i_{r1}, i_{r2}, ... getheilt werden kann, in deren jedem die Curve den Bedingungen der Theoreme IV oder V genügt und also eine bestimmte Länge l_{r1}, l_{r2}, ... besitzt. Diese Intervalle i_{r1}, i_{r2}, ... füllen die Strecke i_r in dem Grade aus, dass alle inneren Punkte der letzteren entweder im Inneren oder auf der Grenze eines Intervalles $i_{r\kappa}$ liegen. Die Gesammtheit aller Intervalle $i_{r\kappa}$, welche nach einem Satze von Herrn CANTOR ebenfalls abzählbar ist, füllt daher die ganze Strecke $x_0 x_1$ so, dass die Gesammtheit der nicht im Inneren eines solchen Intervalles gelegenen Punkte abzählbar ist. Die im Theorem VI an die Intervalle i gestellte Forderung wird also von den Intervallen $i_{r\kappa}$ erfüllt, und ebenso die Forderung, dass die Curve in jedem Intervalle i eine bestimmte Länge hat.

Hiermit ist die zu Anfang dieser Nummer aufgestellte Behauptung, betreffend die Tragweite von Theorem VI, erwiesen.

7.

Eine besonders einfache Anwendung des Theorems VI und der in § 6 angestellten Betrachtungen enthält folgendes

Theorem VII. Wenn die Curve $y = f(x)$ entweder stetig ist oder den Bedingungen 1—4 von Theorem II genügt; wenn ferner eine solche Constante

$C < \pi$ existirt, dass die Gesammtheit der im Intervall $x_0 x_1$ gelegenen Stellen P, an denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung grösser als C ist, eine abzählbare Menge bildet, so lässt sich eine abzählbare Menge von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ von der Art angeben, dass ausserhalb derselben nur Punkte der Menge P liegen, und dass im Inneren jedes Intervalles i_r die Gesammtschwankung der Richtung nicht grösser als C ist. Werden die Werthe von y, welche den Endpunkten des Intervalles i_r entsprechen, mit y'_r und y''_r bezeichnet, so hat die Curve von x_0, y_0 bis x_1, y_1 eine Länge oder nicht, jenachdem die Summe $\sum_r |y''_r - y'_r|$ endlich ist oder nicht.

Beweis.

Der Beweis für den ersten Theil dieses Theorems, betreffend die Möglichkeit der Eintheilung in Intervalle $i_1, i_2, \ldots$, in deren jedem die Gesammtschwankung der Richtung nicht grösser als C ist, ist in den Betrachtungen von § 6 enthalten, wo die hier $i_1, i_2, \ldots$ genannten Intervalle mit $i_{r\mu}$ bezeichnet wurden. Der zweite Theil, das Criterium für die Existenz der Länge, ist eine Folge des Theorems VI, wenn man die in § 4 angegebene obere Grenze für die Länge l_r berücksichtigt. Setzen wir nämlich

$$G \geqq \operatorname{tg} \frac{C}{2},$$

so ist nach Theorem IV oder V

$$l_r \leqq \sqrt{1 + G^2} \left(2(x''_r - x'_r) + \frac{|y''_r - y'_r|}{G} \right),$$

oder auch direkt nach Theorem V a für $C' \geqq C$

$$l_r < 2 \frac{(x''_r - x'_r)}{\cos \frac{C'}{2}} + \frac{|y''_r - y'_r|}{\sin \frac{C'}{2}}.$$

Ausserdem ist offenbar

$$l_r \geqq |y''_r - y'_r|.$$

Mit Rücksicht auf Theorem VI folgt aus der letzten Relation, dass das Theorem VII nothwendige, aus jeder der beiden vorhergehenden, dass es hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Länge L enthält.

Beispiel zu Theorem VII.

Wir wählen eine recht complicirte Curve. Es sei

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x - w_\nu)^{\frac{1}{3}} + C,$$

wo $w_1, w_2, \ldots$ die Reihe aller rationalen Zahlen ist, während die c_ν sämmtlich positiv und so gewählt sein sollen, dass die unendliche Summe $\varphi(x)$ für alle Werthe von x innerhalb eines gewissen Intervalles convergirt. [1] Der Constanten C geben wir einen solchen Werth, dass $\varphi(0) = 0$ wird. Es sei ferner

$$\psi(x) = x \lg \frac{1}{x} \sin\left(\lg \lg \frac{1}{x}\right).$$

Dann wird durch die Gleichung

$$y = f(x) = \varphi(x)\psi(x)$$

eine Curve definirt. Durch Anwendung des Theorems VII lässt sich mit Leichtigkeit zeigen, dass dieselbe von $x = 0$ bis $x = 1$ eine endliche Länge besitzt.

Es ist nämlich, da $\psi(x)$ in der Umgebung jedes Punktes x im Inneren der Strecke $0 \ldots 1$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelt werden kann,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\psi(x) + \varphi(x+h)\psi'(x+\vartheta h)$$

$$= \left[\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\psi(x) + \frac{\varphi(x+h)}{x+\vartheta h}\psi(x+\vartheta h)\right]$$

$$- \varphi(x+h)\left|\cos\left(\lg \lg \frac{1}{x+\vartheta h}\right) + \sin\left(\lg \lg \frac{1}{x+\vartheta h}\right)\right|.$$

---

[1] Vergl. das Beispiel 1 zu Theorem IV.

Hat x einen Werth, wofür $\psi(x) \gtrless 0$ wird, so hat das erste Glied rechts für alle Werthe h unterhalb einer gewissen Grenze das Vorzeichen von $\psi(x)$; denn $\varphi(x)$ ist beständig positiv und nimmt mit x beständig zu. Das zweite Glied aber ist absolut kleiner als $\sqrt{2}\varphi(1)$. Folglich ist $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für genügend kleine Werthe von h grösser als $-\sqrt{2}\varphi(1)$, wenn $\psi(x)$ positiv ist, und kleiner als $\sqrt{2}\varphi(1)$, wenn $\psi(x)$ negativ ist.

Denken wir uns jetzt die Strecke $0 \ldots 1$ in eine abzählbar unendliche Schaar von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ getheilt, indem wir als Theilpunkte alle diejenigen Punkte annehmen, für welche $\psi(x) = 0$ ist, so ist im Inneren jedes Intervalles i_r die Gesammtschwankung der Richtung höchstens gleich $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}[\sqrt{2}\varphi(1)]$; denn alle vier Derivirten sind entweder durchweg kleiner als $\sqrt{2}\varphi(1)$ oder durchweg grösser als $-\sqrt{2}\varphi(1)$. Die den Endpunkten des Intervalles i_r entsprechende Differenz $y_r'' - y_r'$ ist aber Null, folglich auch die Summe $\sum\limits_r |y_r'' - y_r'|$. Also hat die Curve nach Theorem VII von $x = 0$ bis $x = 1$ eine Länge L, und zwar ist dieselbe nicht grösser als $2\sqrt{1 + 2\varphi(1)^2}$.

Das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

ist sinnlos, welche Werthe wir auch den Grössen x_0 und x_1 geben mögen; denn $f'(x)$ wird für alle rationalen Werthe von x unendlich gross.

Durch das Theorem VI werden, wie in § 6 gezeigt worden ist, alle Curven erledigt, für welche die Stellen, an denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung gleich π ist, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden.

Allgemeine Criterien der Existenz einer Länge für den Fall aufzustellen, dass die Gesammtheit jener Stellen eine höhere Mächtigkeit hat, ist uns noch nicht gelungen. Man wird bei derartigen Curven auf die Theoreme I—III zurückgreifen müssen. Wir bemerken nur noch, dass es Curven dieser Art giebt, denen eine bestimmte Länge zukommt. Beispiele sollen bei nächster Gelegenheit mitgetheilt werden.

Berlin d. 8ten December 1883.

EINIGE ANZAHLEN FÜR KEGELFLÄCHEN

VON

H. KREY

in FREIBURG $^{i}/_{B}$.

In einer durch 6, 7 oder 8 feste Puncte definirten Schaar von Flächen zweiter Ordnung sind bekanntlich Kegelflächen enthalten, und zwar bilden die Scheitel derselben eine Fläche 4ter Ordnung, eine Raumcurve 6ter Ordnung, oder sind in endlicher Anzahl 4 vorhanden. Die erste dieser Zahlen lässt sich leicht verallgemeinern: Die Scheitel von Kegeln n^{ter} Ordnung, welche durch $\frac{1}{2}n(n+3)+1$ Puncte gehen, bilden eine Fläche der Ordnung

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Man zeigt dieses auch durch Rechnung, wenn man den Kegelscheitel als Projectionscentrum auf einer Geraden sich bewegen lässt, und die Bedingung ausdrückt, dass die auf eine Ebene projicirten Puncte in einer Curve n^{ter} Ordnung liegen sollen. Weniger leicht ist die Verallgemeinerung der zweiten und dritten obiger Zahlen. Wenn $n = 2$, erhält man z. B. die zweite aus der ersten dadurch, dass man zwei Gruppen von 6 Puncten annimmt, die 5 Puncte gemeinschaftlich haben. Versucht man aber, dieses nahe liegende Verfahren auf Kegel n^{ter} Ordnung auszudehnen, dann stellen sich gewisse Schwierigkeiten ein. So würde z. B. folgende Aufgabe zu behandeln sein: Wie viele Puncte x in fester Ebene, abgesehen von den Spuren der Verbindungsgeraden von $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebenen Puncten, haben eine solche Lage, dass ein Kegel n^{ter} Ordnung mit Scheitel x, der jene Puncte enthalten soll, *nicht* bestimmt ist? — Um

derartige Schwierigkeiten zu umgehen, habe ich einen anderen Weg eingeschlagen, und fast ausschliesslich von dem *Princip der Erhaltung der Anzahl* Gebrauch gemacht.

I.

Erklärung der Abkürzungen. Ort der Spitzen einer zweifach unendlichen Kegelschaar.

Als Zeichen für die zweifache, einfache, resp. nullfache Bedingung, dass die Kegelspitze x in einer gegebenen Geraden, oder Ebene, oder endlich beliebig im Raum liege, soll gesetzt werden:

$$x_g, \quad x_e, \quad x_r.$$

Zur Bestimmung eines Kegels oder einer endlichen Anzahl solcher müssen noch

$$\frac{1}{2}n(n+3)+i \qquad (i=1, 2, 3)$$

Bedingungen gegeben sein; aber von ihnen sollen immer nur diejenigen, welche nicht einfache Punctbedingungen sind, besonders bezeichnet werden. Solche bevorzugte Bedingungen sind

P^μ, d. h. die Gerade xP zur μ-fachen Kante zu haben, wenn der Punct P, nicht aber die Kante selbst, gegeben ist.

P^μ_e; der gegebene Punct, durch welchen die μ-fache Kante gehen soll, liegt in der Ebene e.

$P^\mu T_g$, oder $P^\mu_e T_e$; eine berührende Ebene längs der μ-fachen Kegelkante ist gegeben; dieselbe enthält die Gerade g, oder fällt mit der Ebene e zusammen.

P^μ, ht; es sollen h gegebene, durch P gelegte gerade Linien Tangenten des Kegels in P werden.

$G^\mu, \mu' E$; die μ-fache Kegelkante mit μ' berührenden Ebenen ist gegeben.

Im letzten Falle ist est selbstverständlich, dass x auf der Geraden G liegt; in den übrigen Fällen aber muss die Bedingung für x hinzugefügt werden. Dabei ist es unnöthig, die Zahl der übrigen, einfachen, Bestimmungspuncte, wie z. B., wenn die Bedingungen x_e, P^μ, ht gegeben sind.

$$\frac{1}{2}n(n+3)+2-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-h,$$

ausdrücklich anzugeben, weil sie schon aus μ, h, und dem Index von x folgt.

Jede Zusammenstellung der hier eingeführten Zeichen, wie

$$[x_e,\ P^\mu,\ ht], \qquad [x_e], \qquad [x_r,\ P^\mu], \text{ u. s. f.}$$

bedeutet die *Anzahl* derjenigen Kegelflächen, welche den hingeschriebenen und hinzuzudenkenden Bedingungen genügen. Durch diese Bezeichnung wird offenbar eine bedeutende Abkürzung in der Ausdrucksweise erzielt.

Es gelingt nun, *die Symbole mit* $[x_r]$ *auf solche mit* $[x_e]$, *die mit* $[x_e]$ *auf solche mit* $[x_g]$ *zurückzuführen.* Mit der Berechnung der letzteren hat man also zu beginnen.

Wie so eben erklärt ist, bedeutet

$$(1) \qquad [G^\mu,\ \mu' E] \qquad (\mu' \leq \mu)$$

die Zahl der Puncte auf einer Geraden G, welche eine solche Lage haben, dass aus ihnen als Spitze ein Kegel n^{ter} Ordnung construirbar ist, welcher G zur μ-fachen Kante hat, von μ' gegebenen, durch G gelegten Ebenen längs dieser Kante berührt wird, und durch

$$a+1=\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-\mu'+1$$

gegebene Puncte des Raums geht. Die Zahl (1) ist daher auch gleich dem Grade eines einstufigen Linienortes, welcher auf folgende Art entsteht. Durch jeden Punct von G als Spitze legt man den Kegel, der die Bedingungen G^μ, $\mu' E$ erfüllt, und durch a gegebene Puncte geht. Jeder dieser Kegel trifft eine feste, durch G gelegte Ebene in $n-\mu$ beweglichen Geraden, die den erwähnten Linienort ausfüllen. Um den Grad dieses Ortes zu bestimmen, braucht man nur zu untersuchen, wie viele seiner

Strahlen durch einen Punct Q *der Geraden* G gehen. Es sind dieses erstens die $n-\mu$ Geraden, welche der Kegel mit Scheitel Q liefert; zweitens aber tritt für gewisse Puncte von G der Fall ein, dass eine der $n-\mu$ beweglichen Geraden mit G zusammenfällt, und somit auch durch Q geht. Daher ist

$$(2) \qquad [G^{\mu},\ \mu' E] = \begin{cases} n-\mu+[G^{\mu},\ (\mu'+1)E], & \text{wenn } \mu'<\mu \\ n-\mu+[G^{\mu+1}], & \text{wenn } \mu'=\mu, \end{cases}$$

woraus man leicht ableitet:

$$(3) \qquad [G^{\mu-1}]-[G^{\mu}]=\mu(n-\mu+1).$$

Summirt man die hieraus für $\mu = 1, 2, \ldots, n$ entstehenden Gleichungen, und beachtet, dass $[G^n]=0$ ist, so findet sich

$$[G^0]=\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\mu(n-\mu+1),$$

oder in anderer Bezeichnung

$$(4) \qquad [x_g]=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Die Fläche der Ordnung $[x_g]$ enthält offenbar die $\frac{n(n+3)}{2}+1$ gegebenen Puncte n-fach, ihre Verbindungsgeraden einfach.

Aus (3) folgt noch durch Summirung von $\mu=1$ bis $\mu=\mu$

$$[G^{\mu}]=[x_g]-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)n+\frac{1}{3}(\mu^3-\mu),$$

und darauf aus (2) die später zu benutzende Gleichung:

$$(5) \quad [G^{\mu},\ (\mu-1)E]=[x_g]-\frac{1}{2}(\mu^2+3\mu-2)n+\frac{1}{3}\mu(\mu^2+3\mu-4).$$

2.

Ort der Spitzen einer einfach unendlichen Kegelschaar.

Auf dieselbe Art, wie $[x_g]$ bestimmt wurde, hätte man auch

$$[x_g,\ P^\mu]$$

berechnen können, würde aber dann Kegel mit zwei mehrfachen Kanten zu betrachten gehabt haben. Viel schneller gelangt man zum Ziel, *wenn man $\mu + 1$ der willkürlich gelegenen Bestimmungspuncte dem Puncte P unendlich nahe legt*, wodurch sie in die Lagen $Q_1, \ldots, Q_{\mu+1}$ kommen mögen. Die Kegel, welche jetzt den gestellten Bedingungen genügen, haben entweder ihren Scheitel in einer der Ebenen $PQ_1Q_2, \ldots, PQ_\mu Q_{\mu+1}$, oder sie schicken durch P eine $(\mu + 1)$-fache Kante, d. h. man hat

$$[x_g,\ P^\mu] - [x_g,\ P^{\mu+1}] = \frac{1}{2}\mu(\mu + 1),$$

woraus durch Summirung von $\mu = 1$ bis $\mu - 1$, wegen $[x_g,\ P^n] = 0$,

$$(6) \qquad [x_g,\ P^\mu] = [x_g] - \frac{1}{6}(\mu^3 - \mu)$$

folgt.

Das gleiche Verfahren führt zu einem anderen Ausdruck für

$$[x_e,\ P^\mu].$$

Die $\frac{1}{2}\mu(\mu + 1)$ Ebenen $PQ_1Q_2, \ldots, PQ_\mu Q_{\mu+1}$ bestimmen jetzt ebensoviele Spuren g in der Ebene e, und den Forderungen kann erstens dadurch genügt werden, dass x in einer dieser Geraden liegt, zweitens dadurch, dass der Kegel eine $(\mu + 1)$-fache Kante durch P schickt. Jede der Geraden g enthält

$$[x_g,\ P^\mu T_g]$$

Scheitel von Kegeln, welche der Aufgabe genügen; zu diesen Scheiteln gehören indessen auch die

$$3\cdot\binom{\mu+1}{4}$$

Schnittpuncte zweier g, welche nicht Spuren der Geraden $PQ_1, \ldots, PQ_{\mu-1}$ sind; damit diese nicht zwei Mal gezählt werden, hat man ihre Zahl von

$$\frac{1}{2}\mu(\mu+1).[x_g,\ P^\mu T_g]$$

in Abzug zu bringen, und erhält so

$$(7)\quad [x_e,\ P^\mu]-[x_e,\ P^{\mu+1}]=\frac{1}{2}\mu(\mu+1)[x_g,\ P^\mu,\ T_g]-\frac{1}{8}\mu(\mu^2-1)(\mu-2).$$

Das erste Symbol rechts kann man leicht auf (6) zurückführen. Legt man in der Bedingung (6) einen der noch verfügbaren Puncte Q in die Nähe von P, und zwar so, dass $\overline{PQ}$ die Gerade g in x' trifft, dann genügt der Kegel aus x', μ mal zählend, der Forderung, während die übrigen die Bedingung T_g erfüllen; d. h. man hat

$$[x_g,\ P^\mu T_g]=[x_g,\ P^\mu]-\mu,$$

und durch Einsetzen in die vorige Gleichung, und Benutzung von (6)

$$(8)\qquad [x_e,\ P^\mu]-[x_e,\ P^{\mu+1}]$$

$$=\frac{1}{12}\mu(\mu+1).n(n+1)(n+2)-\frac{1}{24}\mu(2\mu^4+5\mu^3+4\mu^2+7\mu+6).$$

Nun ist

$$[x_e,\ P^n]=3\cdot\binom{n+2}{4};$$

denn nachdem aus den $(n+2)$ Puncten ein Quadrupel A_1, A_2, A_3, A_4 herausgegriffen ist, kann man als Axe des degenerirten Kegels jede Gerade wählen, welche durch P geht, und eines der 3 Geradenpaare

$$A_1A_2,\ A_3A_4;\ A_1A_3,\ A_2A_4;\ A_1A_4,\ A_2A_3$$

trifft. Die Gleichung (8) giebt also durch Summirung von $\mu = 1$ bis $\mu = n - 1$

$$(9) \qquad [x_e] = \frac{1}{72} n(n-1)(n+1)(n+2)(n^2+4n+6)$$

und sodann durch Summirung von $\mu = 1$ bis $\mu - 1$ die allgemeinere, später noch zu verwerthende:

$$(10) \quad [x_e, P^\mu] = [x_e] - \frac{1}{6}\mu(\mu^2-1)[x_g] + \frac{1}{72}\mu(\mu-1)(\mu^4+\mu^3-\mu^2+5\mu+6).$$

Beiläufig bemerkt, folgt aus (9)

$$(10_a) \quad \left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{n(n+3)}{2}\left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right] - [x_e]$$

$$= \frac{1}{72} n(n-1)(n-2)(n^3+9n^2+29n+33)$$

für die Zahl der von den Spuren der Verbindungsgeraden verschiedenen Puncte in e, aus welchen ein Kegel durch die $\frac{n(n+3)}{2}$ Puncte *nicht* bestimmt ist. Die *directe* Bestimmung dieser Zahl ist mir nur für $n = 3$ gelungen.

3.

Zahl der Kegel durch $\frac{1}{2}n(n+3)+3$ *Puncte.*

Die Annäherung *eines* der gegebenen Puncte an P hat zur Folge, dass ein Theil der Kegelspitzen x, welche der Bedingung

$$[x_r, P^\mu, ht]$$

genügen, *sich ebenfalls dem Puncte P unendlich nähert.* Für wie viele x dieses eintritt, möge vorläufig mit

$$(n-\mu)\varphi(n, \mu, h), \text{ oder kürzer } (n-\mu)\varphi(h)$$

bezeichnet werden. Man hat dann

$$(11)\qquad [x_r,\ P^\mu,\ ht] = (n-\mu)\varphi(h) + [x_r,\ P^\mu,\ (h+1)t],$$

$$(h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \mu)$$

also auch

$$(12)\quad [x_r,\ P^\mu] = (n-\mu)[\varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(\mu)] + [x_r,\ P^\mu,\ (\mu+1)t].$$

Die der Bedingung

$$[x_r,\ P^\mu,\ (\mu+1)t]$$

genügenden Kegel haben entweder $\overline{xP}$ zur $(\mu+1)$-fachen Kante — in welchem Falle die Forderung $(\mu+1)t$, unabhängig von der Lage der $(\mu+1)$ berührenden Ebenen längs dieser Kante, als erfüllt zu betrachten ist — oder haben ihren Scheitel in einer der Ebenen $t_i t_k$, die durch je zwei der Richtungen t bestimmt ist. Die Anzahl dieser letzteren Kegel beträgt weniger als

$$\frac{1}{2}\mu(\mu+1)[x_e,\ P_e^\mu T_e(\mu-1)t],$$

weil hier wieder zu beachten ist, dass jede Schnittgerade zweier solcher Ebenen, welche nicht zu den t selbst gehört,

$$[G^\mu,\ (\mu-1)E]$$

den Forderungen genügende Puncte x enthält, dass also, damit letztere nicht zwei Mal gezählt werden, von dem vorigen Ausdruck das

$$3\cdot\binom{\mu+1}{4}\text{-fache}$$

abgezogen werden muss. So entsteht die Gleichung

$$(13)\qquad [x_r,\ P^\mu,\ (\mu+1)t] - [x_r,\ P^{\mu+1}]$$

$$= \frac{1}{2}\mu(\mu+1)[x_e,\ P_e^\mu T_e(\mu-1)t] - \frac{1}{8}\mu(\mu^2-1)(\mu-2).[G^\mu,\ (\mu-1)E].$$

Um rechts die Bedingung T_e wegzuschaffen, gehen wir aus von der weniger speciellen Forderung

$$[x_e,\ P_e^\mu(\mu-1)t],$$

und legen einen der noch freien Puncte Q in die Nähe von P_e, und zwar in die Ebene e. Dadurch theilen sich sofort die fraglichen Puncte x_e in drei Gruppen. Ein Theil liegt jetzt in unendlicher Nähe von P_e; die Zahl derselben soll mit

$$(n-\mu)\psi(\mu-1)$$

bezeichnet werden; auf der Geraden $P_e Q_e$ liegen

$$[G^\mu,\ (\mu-1)E]$$

Puncte, von welchen jeder μ-fach zählt; die übrigen endlich erfüllen die Bedingung T_e. Dies giebt

$$(14) \qquad [x_e,\ P_e^\mu T_e(\mu-1)t]$$
$$= [x_e,\ P_e^\mu(\mu-1)t] - (n-\mu)\psi(\mu-1) - \mu.[G^\mu,\ (\mu-1)E].$$

Ferner kann man P_e^μ durch P^μ ersetzen vermöge der Gleichung

$$(15) \qquad [x_e,\ P_e^\mu(\mu-1)t] = [x_e,\ P^\mu,\ (\mu-1)t] - \varphi(\mu-1).$$

Auf der rechten Seite darf man *jetzt* die Bedingung $(\mu-1)t$, da sie $\mu-1$ einfachen Punctbedingungen äquivalent ist, weglassen. $\varphi(\mu-1)$ ist nichts Anderes als die Vielfachheit der Raumcurve $[P^\mu,\ (\mu-1)t]$ im Puncte P; dass φ hier dieselbe Bedeutung hat wie in der Gleichung (11), wird sogleich nachgewiesen werden.

Aus (12), (13), (14), (15) folgt nun die Reductionsformel

$$(16) \qquad [x_r,\ P^\mu] - [x_r,\ P^{\mu+1}] = (n-\mu)\sum_{h=0}^{h=\mu}\varphi(h)$$

$$+\frac{1}{2}\mu(\mu+1)\Big\{[x_e, P^\mu] - \frac{1}{4}(\mu^2+\mu+2)[G^\mu, (\mu-1)E] - \varphi(\mu-1) - (n-\mu)\psi(\mu-1)\Big\},$$

welche zur Berechnung von $[x_r,\ P^\mu]$ dienen kann, sobald $\varphi(h)$, $\psi(h)$ ermittelt sein werden. Die Bedeutung der letzteren Zahlen erkennt man durch nachstehende geometrische Überlegung.

Nachdem einer der

$$\alpha+1 = \frac{1}{2}n(n+3)+3-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-h$$

freien Puncte Q der Bedingung (11) in die Nähe von P gelegt ist, projicire man die noch übrigen aus P auf eine beliebige Ebene E, wodurch Puncte $M'_1, \ldots, M'_a$ entstehen, deren Lage als constant angesehen werden darf, so lange das Projectionscentrum sich nur unendlich wenig von P entfernt. In E construire man Plancurven n^{ter} Ordnung, welche durch $M'_1, \ldots, M'_a$ gehen, und einen μ-fachen Punct P' der Art haben, dass die Puncte $t'_1, \ldots, t'_h$, die Spuren der Richtungen $t_1, \ldots, t_h$, einzeln oder zu zweien auf dessen Tangenten liegen. Den Punct x kann man nun, ohne ihn um ein Endliches von P zu entfernen, in der Geraden PP' auf genau $n - \mu$ Arten so wählen, dass die Projection Q' von Q in die Plancurve fällt. Der aus einem solchen Puncte x über der C_n construirte Kegel genügt offenbar allen gestellten Bedingungen, und es giebt

$$(n - \mu)\varphi(h)$$

solcher Puncte x, wenn $\varphi(h)$ die Zahl der Plancurven n^{ter} Ordnung bedeutet, die auf die angegebene Weise construirbar sind.

Lässt man die Bedingung Q fort, dann hat man es mit einer Raumcurve

$$[P^{\mu}, ht]$$

zu thun, deren Vielfachheit in P $\varphi(h)$ beträgt. Die Richtungen, in welchen diese Curve durch P geht, sind nämlich die Verbindungsgeraden von P mit den verschiedenen Puncten P'.

In ähnlicher Weise wird die Bedeutung der in Gleichung (14) eingeführten Zahl $\varphi(\mu - 1)$, und allgemeiner die von $\varphi(h)$ ersichtlich. Die Forderung

$$[x_e, P_e^{\mu}, ht]$$

beschränkt x auf die Ebene e. Wir lassen einen der

$$\alpha = \frac{n(n+3)}{2} + 2 - \frac{\mu(\mu+1)}{2} - h$$

freien Puncte Q_e in die Nähe von P_e rücken, und projiciren die $\alpha - 1$ übrigen auf eine Ebene E, die e in der Geraden l treffen möge. Die Plancurven in E, welche Leitcurven von Kegeln werden sollen, müssen jetzt ihren μ-fachen Punct P'_e in der Geraden l haben, und im Übrigen hinsichtlich der festen Puncte $t'_1, \ldots, t'_h$ denselben Bedingungen genügen. Verbindet man einen der $n - \mu$ weiteren gemeinschaftlichen Puncte einer

solchen Curve und der Geraden Γ mit Q_e, so wird auf der Geraden $P_e P'_e$ ein zu P_e benachbarter Punct x bestimmt, welcher einer der gesuchten ist.

Im Falle $\mu = 1$ bedürfen diese Überlegungen einer kleinen Modification; jedoch sind die für $\varphi(h)$, $\psi(h)$ zu entwickelnden Ausdrücke der Art, dass die Gleichung (16) für $\mu = 1$ richtig bleibt.

Man hat also noch zu bestimmen:

1) Die Zahl $\varphi(h)$ der Plancurven n^{ter} Ordnung, welche durch

$$\alpha = \frac{n(n+3)}{2} + 2 - \frac{\mu(\mu+1)}{2} - h$$

gegebene Puncte gehen, und einen μ-fachen Punct haben, dessen Tangenten h gegebene Puncte treffen (wobei sich die h Puncte nicht nothwendig auf h *verschiedene* Tangenten vertheilen).

2) Die Ordnung $\psi(h)$ des Ortes der μ-fachen Puncte, welcher entsteht, wenn nur $\alpha - 1$ Puncte zu Grunde gelegt werden, und die Bedingungen im Übrigen dieselben bleiben.

Für $h = 0$ ist

(17) $$\psi(0) = \frac{1}{2}\mu(\mu+1)(n-\mu+1)$$

(18) $$\varphi(0) = \frac{1}{8}\mu(\mu^2-1)(\mu+2)(n-\mu+1)^2.$$

Was die erste dieser Zahlen angeht, so kann man ja sogar die Gleichung des betreffenden Ortes wirklich bilden. Wählt man $r = \frac{1}{2}\mu(\mu+1)$ linear-unabhängige Curven, welche durch die $\alpha - 1$ Puncte gehen, als Grundcurven einer Schaar, und stellt die r Bedingungen für das Vorhandensein eines μ-fachen Punctes auf, so giebt die lineare Elimination der Parameter eine Determinante von r Reihen. — Durch α Puncte gehen nur $r - 1$ linear-unabhängige C_n; man erhält also jetzt als nothwendige und hinreichende Bedingung für einen μ-fachen Punct das gleichzeitige Verschwinden der $(r-1)$-reihigen Determinanten einer Matrix von r Horizontalreihen und $r - 1$ Verticalreihen, und hieraus ergiebt sich ohne Schwierigkeit für die Zahl der Curven mit einem μ-fachen Punct

$$[(r-1)^2 - (r-2)^2 \ldots \pm 4 \mp 1](n-\mu+1)^2,$$

d. i. der Ausdruck (18).

Von (17), (18) ausgehend, kann man leicht $\varphi(h)$, $\psi(h)$ allgemein bestimmen. Für $h > 1$ zerfällt die Curve $\psi(h)$ in die Verbindungsgeraden der h Puncte, und eine Restcurve,

$$\psi(h) = \frac{1}{2}h(h-1) + \psi_1(h).$$

Auch die Zahl $\varphi(h)$ zerlegt sich, wie folgt:

$$\varphi(h) = 3\cdot\binom{h}{4} + \frac{1}{2}h(h-1)\varphi_1(h) + \varphi_2(h),$$

weil der Forderung genügt werden kann erstens durch solche C_n, welche einen Schnittpunct von zwei Verbindungsgeraden der h Puncte zum μ-fachen Punct haben; zweitens dadurch, dass eine dieser Verbindungsgeraden als Tangente des μ-fachen Punctes gegeben ist, drittens endlich dadurch, dass sich die h Puncte auf h *verschiedene* Tangenten vertheilen.

Lässt man einen Punct X sich auf der Curve $\psi_1(h)$ bewegen, so existirt der Voraussetzung zufolge immer eine C_n, welche durch die $\alpha - 1$ Puncte geht, und in X einen μ-fachen Punct hat, dessen Tangenten die Bedingungen $A_1, \ldots, A_h$ erfüllen. Die Verbindungsgerade von X mit einem weiteren festen Puncte A_{h+1} bestimmt $n-\mu$ Puncte Y auf der C_n, und da $\varphi_2(h)$ Puncte X auf der Curve $\psi_1(h)$ vorhanden sind, welche ihre C_n durch den Punct A_{h+1} schicken, so ist

$$(n-\mu)\psi_1(h) + \varphi_2(h)$$

der Grad des Y-Ortes. So gross ist auch die Zahl der Coincidenzen von Y mit X; aber nicht gemeint sind die $h[\psi_1(h) - \mu]$, welche in den einfachen Schnittpuncten der Geraden $A_{h+1}A_1, \ldots, A_{h+1}A_h$ mit der Curve $\psi_1(h)$ stattfinden. Hiernach ist

$$\varphi_2(h+1) = (n-\mu-h)\psi_1(h) + \varphi_2(h) + h\mu.$$

In durchaus analoger Weise findet man

$$\psi_1(h+1) = n-\mu-h+\psi_1(h),$$

$$\varphi_1(h+1) = n-\mu+\varphi_1(h) - (h-2), \qquad (h \geqq 2)$$

$$\varphi_1(2) = \psi(0) + n - 2\mu,$$

und sodann

$$\psi_1(h) = \psi(0) + (n-\mu)h - \frac{h(h-1)}{2},$$

$$\varphi_1(h) = \psi(0) + (n-\mu)h - \frac{1}{2}h(h-5) - n - 3,$$

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{1}{3}h(h-1)(h-2) + h(n-\mu)\psi(0) + \frac{1}{2}h(h-1)(n-\mu)^2,$$

$$\sum_{h=0}^{h=\mu}\varphi(h) = \frac{1}{24}\mu(\mu+1)\Big[(3\mu^3 + 12\mu^2 + 7\mu - 10)n^2$$
$$-(6\mu^4 + 18\mu^3 - 4\mu^2 - 20\mu + 12)n + 3\mu^5 + 6\mu^4 - 8\mu^3 - 2\mu^2 + 3\mu - 2\Big].$$

So ist alles auf der rechten Seite der Gleichung (16) Stehende bekannt. Die Summirung von $\mu = 1$ bis $\mu = n-1$ giebt, mit Hülfe der BERNOULLI'schen Summenformeln, und wegen $[x_r, P^n] = 0$

$$[x_r] = \frac{n(n-1)(n+1)}{6480}[5n^6 + 45n^5 + 170n^4 + 108n^3 + 1526n^2 + 5472n + 3816]$$
$$-280.\binom{n+4}{9} + 280.\binom{n+4}{8} + 105.\binom{n+3}{7} + 77.\binom{n+3}{6}$$
$$+43.\binom{n+2}{5} - 16.\binom{n+2}{4} + 20.\binom{n+1}{3}.$$

Dieses ist also die Zahl der Kegel n^{ter} Ordnung, welche durch $\frac{1}{2}n(n+3)+3$ Puncte gehen; beispielsweise 120 für $n = 3$.

Hieraus lässt sich noch herleiten die Zahl η derjenigen Scheitel, aus welchen ein *Büschel* von Kegeln n^{ter} Ordnung, die durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ gegebene Puncte des Raums gehen sollen, *nicht* bestimmt ist. Natürlich wird abgesehen von den auf den Verbindungsgeraden jener Puncte liegenden Kegelscheiteln.

Der auf die Puncte $P_1, P_2, \ldots, P_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ bezügliche ξ-Ort, dessen Ordnung

$$\xi = \frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n^3 + 9n^2 + 29n + 33)$$

in (10a) bestimmt wurde, geht mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Zweigen durch jeden

der Puncte P, und trifft, wie aus den Formeln von § 1 leicht nachzuweisen ist, jede Verbindungsgerade *ausserdem* an $m - 3n + 2$ Stellen, wo $m - \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Andererseits füllen die Scheitel von Kegeln, welche durch

$$P_1, \ldots, P_{\frac{1}{2}n(n+3)-1}, \; Q_1, \; Q_2$$

gehen, eine Fläche m^{ter} Ordnung aus, und die Vertheilung der Schnittpuncte mit dem ξ-Orte zeigt, dass

$$\delta = m\xi - \left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right] n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
$$- \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right]\left[\frac{n(n+3)}{2} - 2\right](m - 3n + 2) - \eta$$

Puncte des letzteren Ortes existiren, aus welchen ein Kegel n^{ter} Ordnung über

$$P_1, \ldots, P_{\frac{1}{2}n(n+3)}, \; Q_1, \; Q_2$$

construirbar ist. — Um zu einem zweiten Ausdruck für δ zu gelangen, betrachten wir die Schnittpuncte der in Bezug auf die letztgenannten Puncte definirten Raumcurve $[x_r]$ mit dem Scheitelorte von Kegeln, die durch

$$P_1, \ldots, P_{\frac{1}{2}n(n+3)}, \; Q_3$$

gehen. In jeder der Verbindungsgeraden, welche beiden Punctgruppen gemeinschaftlich sind, liegen $m - n$ Schnittpuncte von Curve und Fläche: zu den übrigen gehören noch die δ Puncte, weil ja die Fläche den ξ-Ort ganz enthält. Hiernach wird

$$m \cdot [x_e] - \frac{1}{2}\frac{n(n+3)}{2}\left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right](m - n) - \delta = [x_r],$$

und da $[x_r]$ schon bekannt ist, lässt sich δ, also auch η bestimmen. Die Ausrechnung giebt

$$\eta = \frac{(n-1)(n-2)}{6480}(5n^7 + 60n^6 + 200n^5 - 492n^4 - 2545n^3 - 2196n^2 + 14832n - 6480).$$

Freiburg, im October 1883.

SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES DOUBLES

PAR

E. GOURSAT

à TOULOUSE.

Le présent mémoire n'est qu'une suite d'un travail publié antérieurement dans le même recueil,[1] où j'indiquais une méthode générale pour l'étude des coupures des intégrales définies. Je m'occupe plus spécialement des intégrales doubles qui ont été signalées par M. HERMITE à la fin de sa lettre à M. MITTAG-LEFFLER (Journal de BORCHARDT, tome 91).

1. L'artifice que j'emploie étant tout-à-fait général, je commencerai par le rappeler en quelques mots. Soit en premier lieu $f(x, u)$ une fonction uniforme ou multiforme des deux variables indépendantes x et u, telle que lorsqu'on attribue à x une valeur particulière x_1, les valeurs de u qui sont des valeurs singulières pour $f(x_1, u)$ ne forment ni des lignes ni des surfaces, ces valeurs pouvant d'ailleurs être en nombre fini ou infini. Appelons $\Phi(x)$ l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} f(x, u)\,du,$$

prise suivant la ligne droite qui joint les deux points u_0, u_1. Ayant adopté pour $f(x, u_0)$ une quelconque de ses déterminations, l'intégrale précédente représente une fonction qui peut être uniforme ou multiforme, mais qui conserve un sens bien déterminé tant que le chemin décrit par

---

[1] Voir Acta Mathematica, T. 2, p. 1—70.

la variable x ne rencontre pas certaines lignes qui sont des coupures pour cette intégrale. Pour savoir ce que devient cette fonction lorsque la variable vient à rencontrer une de ces lignes, je procède de la manière suivante. Soit C une coupure et admettons que lorsque x vient coïncider avec un point ξ situé sur cette ligne, la fonction $f(\xi, u)$ est discontinue pour un point θ situé sur la ligne u_0u_1 et reste finie pour toute autre valeur de u sur ce chemin (fig. 1); de sorte que x allant de x_0 en x_1, le point qui coïncide avec θ pour $x = \xi$ va de τ_0 en τ_1 en traversant la ligne u_0u_1. La méthode consiste uniquement à remplacer l'intégrale $\int_{u_0}^{u_1} f(x, u)du$ qui cesse d'avoir un sens par la même intégrale prise sur le chemin infiniment voisin u_0mu_1 qui est égale à la première et qui continue à avoir un sens. De sorte que lorsque x est venue en x_1, la continuation analytique de $\Phi(x)$ se trouve représentée par le même symbole ou par la somme des deux intégrales

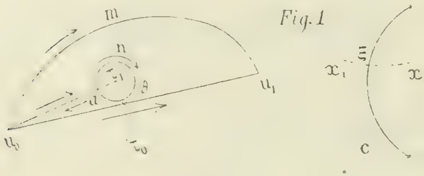
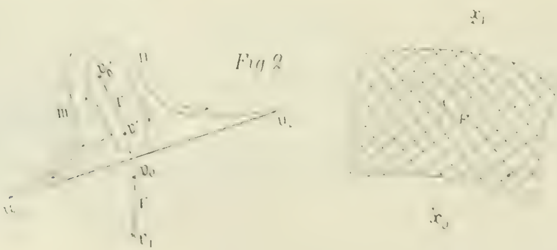


Fig. 1

$$\int_{u_0anau_0} f(x, u)du + \int_{u_0}^{u_1} f(x, u)du.$$

Au lieu de supposer que la fonction $f(x, u)$ n'admet que des points singuliers isolés, on peut se proposer de considérer le cas où cette fonction admet elle-même des coupures ou même des espaces lacunaires. Supposons, par exemple, que lorsqu'on attribue à x une valeur particulière

Fig. 2



x_1, $f(x_1, u)$ admette une ligne de discontinuité, ligne qui est elle-même variable avec x, de façon que lorsque x est compris dans une certaine portion du plan E, cette coupure a un ou plusieurs points communs avec la ligne droite u_0u_1.

L'intégrale $\Phi(x) = \int_{u_0}^{u_1} f(x, u)du$ n'aura aucun sens pour toute valeur de x comprise dans cette portion du plan (fig. 2).

Admettons, pour fixer les idées, que lorsque x traverse l'espace E suivant la ligne x_0x_1, la coupure variable I' traverse la ligne u_0u_1 sans qu'aucun de ses points vienne coïncider avec une des extrémités u_0, u_1, et passe de la position primitive v_0v_1 à la nouvelle position $v_0'v_1'$. On peut, par l'application répétée du théorème de Cauchy, supposer que le chemin d'intégration se déforme d'une manière continue, de façon que la coupure ne l'atteigne jamais; et, lorsque x sera venue en x_1 la continuation analytique de $\Phi(x)$ sera représentée par la même intégrale prise suivant le chemin u_0mnu_1. Si la fonction $f(x, u)$ est uniforme à l'intérieur du contour formé par ce chemin et la ligne droite u_0u_1, on pourra remplacer cette intégrale par l'intégrale primitive $\Phi(x)$, augmentée de l'intégrale

$$\int f(x, u)du$$

prise dans le sens inverse le long d'un contour fermé environnant complètement la ligne $v_0'v_1'$.

2. Cette généralisation de la méthode conduit bien aisément, comme on le verra plus loin, à des conséquences importantes relatives aux intégrales doubles; mais avant d'aborder ce point, il est nécessaire d'étudier de plus près les propriétés des intégrales simples analogues à celles de M. Hermite. Soit $f(x, u)$ une fonction jouissant des propriétés qui viennent d'être rappelées et $\alpha_0\alpha_1$ une coupure de l'intégrale

$$\int f(x, u)du$$

prise suivant une ligne quelconque telle que u_0u_1 (fig. 3).

Je suppose que la coupure $\alpha_0\alpha_1$ ne se coupe pas elle-même, et ne rencontre aucune autre coupure relative à la même intégrale. Lorsque x vient coïncider avec un point de cette ligne, $f(x, u)$ est discontinue

pour un seul point de la ligne $u_0 u_1$. Soit $v = \psi(x)$ la valeur de u qui est pour $f(x, u)$ une valeur singulière; nous pourrons entourer la ligne $\alpha_0 \alpha_1$ d'un contour suffisamment voisin C pour que la fonction $\psi(x)$ soit

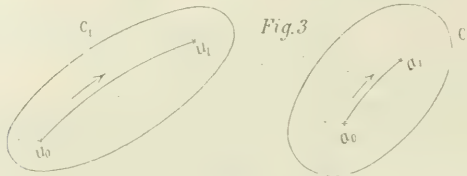


Fig. 3

uniforme à l'intérieur de ce contour. Le point x décrivant la ligne $\alpha_0 \alpha_1$, v décrit la ligne $u_0 u_1$. Inversement lorsque v décrit la ligne $u_0 u_1$, il y a une seule valeur de x déduite de la relation

$$v = \psi(x)$$

qui soit située sur la ligne $\alpha_0 \alpha_1$, puisque cette ligne ne rencontre aucune autre des coupures. Cela revient à supposer que la fonction x de v définie par l'équation $v = \psi(x)$ est uniforme à l'intérieur d'un certain contour C_1 entourant $u_0 u_1$. Les points des deux lignes $u_0 u_1$, $\alpha_0 \alpha_1$ se correspondent donc un à un, et sont décrits simultanément dans le sens indiqué par les flèches. On comprendra suffisamment, sans qu'il soit besoin de le définir, ce que j'entendrai désormais par bord droit et bord gauche de la coupure $\alpha_0 \alpha_1$. Je suppose encore que $f(x, u)$ est uniforme pour les valeurs de x et de u comprises à l'intérieur des contours C et C_1; de sorte que le point $v = \psi(x)$ est pour cette fonction un pôle ou un point singulier essentiel. J'appelle $R(x)$ le résidu relatif à ce point singulier; $R(x)$ est comme $\psi(x)$ une fonction uniforme à l'intérieur de C. Ces hypothèses étant adoptées, l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_{u_0}^{u_1} f(x, u)\,du$$

représente une fonction uniforme de x à l'intérieur de C qui admet la ligne $\alpha_0 \alpha_1$ comme coupure. On reconnait, d'après la méthode générale rappelée au début, que lorsque x traverse la coupure $\alpha_0 \alpha_1$, la fonction

reste continue, et se trouve représentée après le passage par la même intégrale définie augmentée de la quantité $\pm 2i\pi R(x)$, le signe $+$ ou $-$ devant être pris suivant qu'on passe du bord gauche au bord droit ou inversement. De sorte qu'en deux points infiniment voisins d'un point ξ de la ligne $\alpha_0\alpha_1$, on a

$$\Phi(N) - \Phi(N') = 2i\pi R(\xi), \tag{1}$$

le point N étant pris sur le bord gauche. On voit en outre que la fonction $\Phi(x)$ ne présente à l'intérieur du contour C que deux points véritablement singuliers α_0, α_1, et qu'elle peut être mise sous la forme

$$R(x)L\left(\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_0}\right) + P(x),$$

$P(x)$ étant une fonction uniforme dans la même région du plan qui ne peut présenter de discontinuité qu'aux points α_0 et α_1.

3. Pour reconnaître quelle est la forme de cette fonction $P(x)$ dans le voisinage de ces points singuliers, je prends d'abord le cas où le point $v = \psi(x)$ est un pôle simple pour la fonction $f(x, u)$. La différence

$$f(x, u) - \frac{R(x)}{u - \psi(x)}$$

sera une fonction holomorphe à l'intérieur des contours C et C_1, $Q(x, u)$; et on aura

$$\int_{u_0}^{u_1} f(x, u)du = \int_{u_0}^{u_1} \frac{R(x)du}{u-\psi(x)} + \int_{u_0}^{u_1} Q(x, u)du$$

$$= R(x)L\{u_1 - \psi(x)\} + \left[\int_{u_0}^{u_1} Q(x, u)du - R(x)L\{u_0 - \psi(x)\}\right].$$

La seconde partie est continue dans le voisinage du point $x = \alpha_1$; de plus, comme $\psi(x)$ devient égal à u_1 pour $x = \alpha_1$, on a dans le voisinage de ce point

$$\psi(x) = u_1 + A_1(x - \alpha_1) + A_2(x - \alpha_1)^2 + \dots$$

A_1 étant différent de zéro puisqu'on suppose que la coupure $\alpha_0\alpha_1$ est isolée ou qu'une seule valeur de x devient égale à α_1 pour $u = u_1$. Ceci peut s'écrire

$$u_1 - \psi(x) = (x - \alpha_1)\psi_1(x),$$

$\psi_1(x)$ désignant une fonction holomorphe pour $x = \alpha_1$, et différente de zéro pour cette valeur. La première partie est donc égale à

$$R(x)L(x - \alpha_1) + R(x)L\{\psi_1(x)\};$$

ce qui montre que la fonction $P(x)$ est uniforme et continue dans le domaine du point α_1, et il en est évidemment de même dans le domaine du point α_0.

Plus généralement supposons que le point $v = \psi(x)$ soit pour $f(x, u)$ un pôle d'ordre n, de telle sorte qu'en retranchant de cette fonction une expression de la forme

$$\frac{B_1}{[u - \psi(x)]^n} + \frac{B_2}{[u - \psi(x)]^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{[u - \psi(x)]^2} + \frac{R(x)}{u - \psi(x)},$$

où les B sont des fonctions uniformes de x, le résultat soit une fonction uniforme de x et de u. On a pour l'intégrale considérée la même expression que tout-à-l'heure sauf les termes

$$-\frac{1}{n-1}\frac{B_1}{[u_1 - \psi(x)]^{n-1}} - \ldots - \frac{B_{n-1}}{u_1 - \psi(x)};$$

or dans le voisinage du point $x = \alpha_1$, on a en général

$$\frac{1}{[u_1 - \psi(x)]^m} = \frac{1}{(x - \alpha_1)^m}\psi_2(x),$$

$\psi_2(x)$ étant une fonction holomorphe de x pour $x = \alpha_1$; de sorte que ce point α_1 sera en général pour l'intégrale un pôle d'ordre $n - 1$. On verrait de même que si le point $v = \psi(x)$ est pour $f(x, u)$ un point singulier essentiel, il en est de même des points α_0 et α_1 pour $P(x)$.

Ainsi, dans les intégrales de M. Hermite

$$\Phi(x) = \int_{u_0}^{u_1} \frac{F(x, u)}{G(x, u)}du,$$

où $F(x, u)$, $G(x, u)$ sont des fonctions entières de x et de u, les points α_0 et α_1 seront des points ordinaires pour $P(x)$, tandis que dans les intégrales

$$\Phi_1(x) = \int_{u_0}^{u_1} \frac{F(x, u)}{G^2(x, u)} du$$

ces mêmes points seront des pôles simples pour $P(x)$. Cherchons le résidu relatif à ces pôles. On a

$$\frac{1}{G(x, u)} = \frac{1}{[u - \psi(x)] \frac{\partial G}{\partial u}} + Q(x, u),$$

$$F(x, u) = F(x, \psi(x)) + F(x, u) - F(x, \psi(x)) = F(x, \psi(x)) + [u - \psi(x)] Q_1(x, u),$$

Q et Q_1 étant des fonctions holomorphes de x et de u et en supposant que dans $\frac{\partial G}{\partial u}$ on ait remplacé u par $\psi(x)$. On aura alors

$$\frac{F(x, u)}{G^2(x, u)} = \frac{F(x, \psi(x))}{[u - \psi(x)]^2 \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2} + \frac{R(x)}{u - \psi(x)} + Q_2(x, u),$$

$Q_2(x, u)$ étant également une fonction holomorphe de x et de u; par suite, dans le voisinage de $x = x_1$, on aura

$$\Phi_1(x) = -\frac{F(x, \psi(x))}{[u_1 - \psi(x)] \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2} + R(x) L(x - \alpha_1) + P_1(x - \alpha_1)$$

$P_1(x - \alpha_1)$ étant continue dans le domaine du point α_1. Mais dans ce même domaine on a

$$\psi(x) = u_1 + \frac{d\psi}{dx}(x - \alpha_1) + \dots$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} \frac{d\psi}{dx} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0;$$

par suite

$$\frac{1}{\psi(x) - u_1} = \frac{1}{(x - a_1)\frac{d\psi}{dx} + \cdots} = \frac{-\frac{\partial G}{\partial u}}{(x - a_1)\frac{\partial G}{\partial x} + \cdots}$$

et le résidu relatif au pôle α_1 sera évidemment

$$\frac{-F(a_1, u_1)}{\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial x}}$$

en supposant que dans $\frac{\partial G}{\partial u}$ et $\frac{\partial G}{\partial x}$ on fasse $x = \alpha_1$, $u = u_1$. Le résidu relatif au pôle α_0 aurait pour expression

$$\frac{F(a_0, u_0)}{\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial x}}.$$

4. Comme application, soit $f(x)$ une fonction uniforme et continue le long d'un arc de courbe C; l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_C \frac{f(u)du}{u - x},$$

prise le long de C, définit une fonction de x holomorphe dans toute l'étendue du plan, sauf sur cette courbe qu'elle admet comme coupure, la différence des valeurs de $\Phi(x)$ en deux points infiniment voisins d'un point ξ de part et d'autre de cette ligne étant précisément égale à $2i\pi . f(\xi)$. En ajoutant plusieurs intégrales de cette nature, on parvient à l'expression, sous forme d'intégrale définie, d'une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, sauf le long de certains arcs de courbe $C_1, C_2, \ldots, C_n$, la différence des valeurs en deux points infiniment voisins d'une coupure étant égale à $f_1(x)$ pour C_1, à $f_2(x)$ pour $C_2, \ldots, f_n(x)$ pour C_n, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ désignant des fonctions tout-à-fait arbitraires. Dans le cas où la ligne d'intégration se compose d'un arc de cercle, on retombe sur des intégrales qui se sont présentées à un autre point de vue dans le beau mémoire de M. Appell *Sur le développement d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle* (Acta Mathematica, T. 1, p. 147).

5. Je considère encore l'intégrale double suivante sur laquelle M. HERMITE a appelé mon attention:

$$\Phi(x) = \int_{u_0}^{u_1}\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x,\ u,\ t)\,du\,dt}{G(x,\ u)\,G_1(x,\ t)},$$

où $F(x, u, t)$, $G(x, u)$, $G_1(x, t)$ désignent, pour fixer les idées, des fonctions entières des variables qui y figurent et où les intégrations sont effectuées suivant des lignes droites. Cette intégrale admet deux sortes de coupures; elles s'obtiennent en prenant, d'une part, la série des valeurs de x que l'équation $G(x, u) = 0$ fait correspondre à la série des valeurs de u croissant de u_0 à u_1 et, d'autre part, la série des valeurs de x qui correspondent à la série des valeurs de t croissant de t_0 à t_1 d'après l'équation $G_1(x, t) = 0$. Soient C_u les premières et C_t les secondes, que nous supposons distinctes les unes des autres. Je considère par exemple une coupure C_u et je prends sur cette coupure un point ξ, n'appartenant pas à une coupure C_t et n'étant pas un point double pour la coupure C_u; de telle sorte qu'une seule des valeurs de u déduite de l'équation

$$G(\xi,\ u) = 0$$

soit située sur le chemin u_0u_1; soit θ le point qui figure cette valeur de u. Posons

$$\Pi(x,\ u) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x,\ u,\ t)\,dt}{G_1(x,\ t)};$$

$\Pi(x, u)$ est évidemment une fonction holomorphe de x et de u, tant que x reste compris dans les environs du point ξ. On peut alors répéter mot pour mot pour l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_{u_0}^{u_1} \frac{\Pi(x,\ u)\,du}{G(x,\ u)}$$

le raisonnement qui a été fait pour les intégrales de M. HERMITE, et on

en déduit que la différence $\Phi(N) - \Phi(N')$ est égale à $2i\pi$ multiplié par le résidu de la fonction

$$\frac{\Pi(\xi, u)}{G(\xi, u)}$$

relatif au pôle $u = \theta$, N et N' étant deux points infiniment voisins de ξ, N sur le bord gauche et N' sur le bord droit de la coupure considérée. Ce résidu a pour expression

$$\frac{\Pi(\xi, \theta)}{\frac{\partial}{\partial \theta} G(\xi, \theta)};$$

on aura donc, en remplaçant Π par sa valeur,

$$\Phi(N) - \Phi(N') = 2i\pi \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(\xi, \theta, t)\,dt}{\frac{\partial}{\partial \theta}\{G(\xi, \theta)\}.G_1(\xi, t)}, \tag{2}$$

et on trouverait pour la différence des valeurs de $\Phi(x)$ en deux points infiniment voisins d'une coupure C_t une expression analogue.

6. Les intégrales doubles signalées par M. Hermite sont de la forme

$$\int_{u_0}^{u_1} du \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x, u, t)\,dt}{G^2(x, u, t)};$$

je considère, pour plus de généralité, les intégrales de la forme

$$\Phi(x) = \int_{u_0}^{u_1} du \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x, u, t)\,dt}{G^n(x, u, t)},$$

où $F(x, u, t)$, $G(x, u, t)$ désignent des fonctions entières de x, u, t, où n est un nombre entier positif et où les intégrations sont effectuées suivant des lignes droites. Le symbole $\Phi(x)$ offre un sens bien déterminé, sauf pour les valeurs de x que l'on obtient en faisant varier u de u_0 à u_1 et t de t_0 à t_1 suivant des lignes droites dans l'équation

$$G(x, u, t) = 0.$$

L'ensemble de ces valeurs de x recouvre en général une certaine portion du plan que j'appelle E; de sorte que la définition de la fonction $\Phi(x)$ par une intégrale double ne nous apprend rien sur le mode d'existence de cette fonction à l'intérieur de l'espace E. Il n'en résulte pas que cette portion du plan soit pour la fonction $\Phi(x)$ un *espace lacunaire*, au sens attribué à ce mot depuis les travaux de M. WEIERSTRASS et de ses disciples. Soit x_0 un point extérieur à E, mais très-voisin de la limite; la fonction considérée étant holomorphe pour $x = x_0$, il existe comme on sait une série procédant suivant les puissances croissantes et positives de $x - x_0$, convergente à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre le point x_0, et dont la somme est égale à $\Phi(x)$ pour tous les points du cercle extérieurs à l'espace E. Deux cas peuvent se présenter: ou bien ce cercle ne pénètre pas à l'intérieur de E, quel que soit le point x_0, et alors E est bien véritablement un espace lacunaire; ou bien ce cercle pénètre à l'intérieur de E. Nous allons reconnaître que c'est ce qui a lieu dans l'exemple considéré; de telle manière que la fonction qui coïncide avec $\Phi(x)$ à l'extérieur de E peut être continuée analytiquement dans cette région. Nous verrons de plus qu'on peut atteindre ainsi tous les points de cette région, sauf un certain nombre de points isolés.

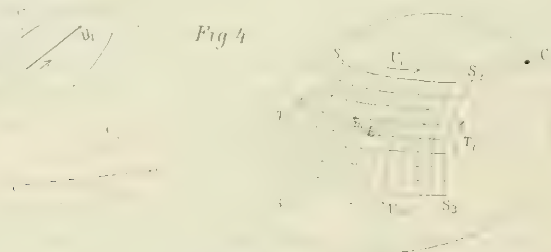
Pour plus de clarté, je me bornerai à l'étude d'un cas simple. Je suppose que, u et t variant dans les limites indiquées, une des valeurs de x déduite de l'équation

$$(3) \qquad G(x, u, t) = 0$$

vienne coïncider une fois et une seule fois avec chacun des points à l'intérieur d'une portion du plan simplement connexe, que je désignerai dorénavant par E; de telle sorte qu'en prenant un contour C, suffisamment rapproché de la limite de E, toutes les autres valeurs de x, déduites de l'équation (3), soient figurées par des points à l'extérieur de C. Le symbole $\Phi(x)$ définit alors une fonction holomorphe de x entre la limite de E et le contour C.

Cet espace E peut être envisagé comme une espèce de quadrilatère curviligne. Si, dans l'équation (3), on attribue à t la valeur t_0 et qu'on fasse varier u de u_0 à u_1, la valeur correspondante de x, comprise à l'intérieur de C, décrit un certain arc de courbe que je désignerai par T_0,

et j'appellerai de même T_1, U_0, U_1 les trois autres arcs de courbe engendrés d'une façon analogue, en remarquant que deux arcs désignés par deux lettres différentes ont toujours une extrémité commune et que deux arcs désignés par la même lettre n'ont aucun point commun. Ces arcs forment par conséquent les côtés d'un quadrilatère curviligne convexe. Plus généralement, soit θ un point du segment de droite $t_0 t_1$, et appelons T_θ l'arc de courbe décrit par la variable x lorsque dans l'équation $G(x, u, \theta) = 0$ on fait varier u de u_0 à u_1. Lorsque le point θ passe de la position t_0 à la position t_1, cet arc de courbe T_θ se déplace en se déformant d'une manière continue de façon que deux arcs différents ne se coupent jamais et que ses extrémités décrivent les côtés U_0, U_1. Il passe ainsi de la position primitive T_0 à la position T_1, après avoir décrit une fois et une seule fois tout l'espace E. Tout pareillement on peut concevoir que l'arc de courbe U_0 passe d'une manière continue de la position primitive à la position U_1. Ce double mode de génération se trouve mis en évidence par la figure suivante (fig. 4).



Par chaque point m de E passe une seule courbe T_θ et une seule courbe U_λ; à chaque point tel que m correspond ainsi un seul couple de points dont l'un est sur $t_0 t_1$, l'autre sur $u_0 u_1$. Par exemple les sommets S_0, S_1, S_2, S_3 du quadrilatère correspondent respectivement aux couples (u_0, t_0), (u_1, t_0), (u_1, t_1), (u_0, t_1). Je suppose de plus, comme l'indique la figure, que lorsqu'on parcourt le contour de E en laissant cet espace à droite on rencontre les côtés successifs dans l'ordre T_0, U_1, T_1, U_0.

Entourons les lignes droites $u_0 u_1$, $t_0 t_1$ de contours C_1, C_2 suffisamment rapprochés pour que les conditions suivantes soient satisfaites. Quand on

fait varier u et t à l'intérieur de ces contours, la valeur de x, déduite de l'équation (3), qui est égale à S_0 pour $u = u_0$, $t = t_0$, reste fonction holomorphe de u et de t. Tout pareillement, quand on fait varier x et u à l'intérieur des contours C et C_1, la valeur de t qui est égale à t_0 pour $x = S_0$, $u = u_0$ reste une fonction holomorphe de x et de u que j'appellerai $\chi(x, u)$. Enfin, lorsque x et t restent compris à l'intérieur des contours C et C_2, la valeur de u qui est égale à u_0 pour $x = S_0$; $t = t_0$ reste holomorphe; soit $v = \psi(x, t)$ cette fonction. Les lignes

$$u_0 u_1, \; t_0 t_1, \; T_0, \; U_1, \; T_1, \; U_0$$

sont décrites dans le sens indiqué par les flèches (fig. 4); sur chacune de ces lignes, il y a donc lieu de distinguer un bord droit et un bord gauche.

7. Posons, pour abréger,

$$\Pi(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x, u, t)dt}{G^n(x, u, t)};$$

$\Pi(x, u)$ est une fonction des deux variables indépendantes x et u qui admet, quand on regarde x comme constant, un certain nombre de coupures variables avec x; ce sont les lignes obtenues en faisant varier t de t_0 à t_1 dans l'équation (3). Je considère seulement celle de ces coupures qui rencontre la ligne $u_0 u_1$ lorsque le point x est situé dans l'espace E. En appelant v_0 et v_1 les extrémités de cette coupure mobile Γ, on aura, d'après la notation adoptée,

$$v_0 = \psi(x, t_0), \qquad v_1 = \psi(x, t_1).$$

Lorsque x est à l'intérieur de C, mais à l'extérieur de E, Γ ne rencontre pas $u_0 u_1$, et rencontre cette droite en un seul point lorsque x est à l'intérieur de E. De plus, d'après les hypothèses faites plus haut, cette ligne Γ ne peut avoir de point double, tant que x reste à l'intérieur de C; nous admettrons en outre qu'elle ne rencontre pas d'autre coupure.

La fonction $\Pi(x, u)$ jouit évidemment des propriétés de la fonction étudiée au n° 2. La différence des valeurs de $\Pi(x, u)$ en deux points infiniment voisins de Γ est égale à $\pm 2i\pi R(x, u)$, $R(x, u)$ étant le résidu de

$$\frac{F(x, u, t)}{G^n(x, u, t)}$$

relatif au pôle défini par l'équation $G(x, u, t) = 0$ quand on y considère t comme la variable indépendante. Quand on considère x comme constant, $H(x, u)$ peut, dans le voisinage du point v_1 être mis sous la forme

$$H(x, u) = R(x, u)L(u - v_1) + P(u),$$

$P(u)$ étant une fonction uniforme de u qui admet le point $u = v_1$ pour pôle d'ordre $n - 1$. Appelons $\lambda_1(x)$ le résidu relatif à ce pôle et $\lambda_0(x)$ le résidu relatif au pôle v_0. Il est clair, d'après la définition même de ces quantités, que $H(x, u)$, $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$ sont des fonctions uniformes à l'intérieur des contours C et C_1.

8. Voyons ce qui arrive lorsque x est sur le contour du quadrilatère E. Supposons x sur le côté T_0; à une valeur de x située sur ce côté correspond le couple de valeurs

$$t = t_0, \qquad u = u_0 + \theta(u_1 - u_0),$$

θ ayant une valeur réelle comprise entre zéro et l'unité; on voit donc que, pour une pareille valeur de x, l'extrémité v_0 de Γ vient coïncider avec un point de la droite u_0u_1. Lorsque x franchit T_0 en passant du bord gauche au bord droit ou de l'extérieur à l'intérieur de E, on sait, d'après une propriété bien connue des fonctions analytiques dont je me suis servi plusieurs fois dans le cours de ce travail, que le point v_0 passe pareillement du bord gauche au bord droit de u_0u_1. Si le point x est situé sur le côté U_0, à cette valeur de x correspond le couple de valeurs

$$u = u_0, \qquad t = t_0 + \lambda(t_1 - t_0);$$

il en résulte d'après la définition de la coupure que le point u_0 est sur Γ. On étudierait de même les autres cas, et la discussion est résumée dans le tableau suivant:

x traversant	T_0, ...	le point	v_0	traverse u_0u_1,
. . . .	T_1, ...		v_1	. . . . ,
. . . .	U_0, ...	le point	u_0	traverse Γ,
. . . .	U_1, ...		u_1	. . . . Γ.

Nous pouvons maintenant nous faire une idée très-nette de la façon dont

se déplace la coupure Γ avec x; les figures suivantes montrent tous les cas qui peuvent se présenter. J'ai figuré d'une part le chemin décrit par la variable, d'autre part les chemins décrits par les extrémités v_0, v_1.

Fig. 5

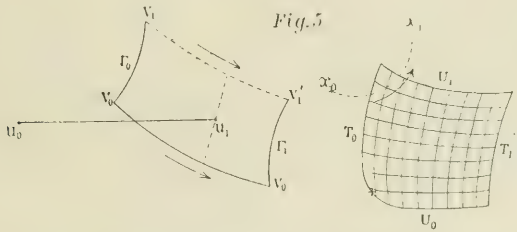


Fig. 6

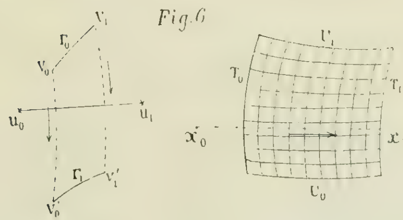
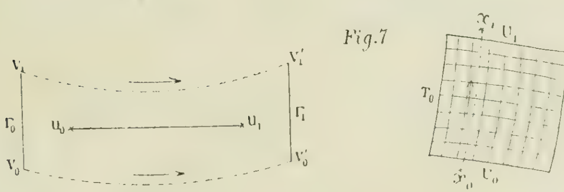


Fig. 7



9. Imaginons que le chemin décrit par la variable pénètre à l'intérieur de E, et voyons ce que devient la fonction analytique qui est égale à $\Phi(x)$ à l'extérieur de ce quadrilatère. On reconnait d'abord, en déformant infiniment peu les chemins d'intégration, ce qui entraîne une déformation analogue des côtés T_0, T_1, U_0, U_1 que la fonction ne cesse pas d'exister. Mais, pour étudier les modifications qu'elle subit, il est nécessaire de distinguer plusieurs cas. Je suppose d'abord que la variable décrive un chemin pénétrant dans le quadrilatère E par un certain côté,

par exemple T_0, et ressortant par le même côté. La figure suivante montre le déplacement correspondant de Γ.

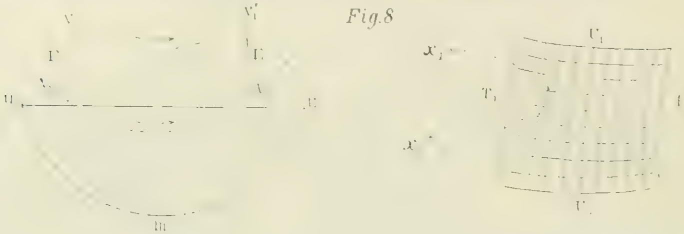


Fig. 8

Avant que la coupure mobile atteigne la droite u_0u_1, on peut remplacer l'intégrale

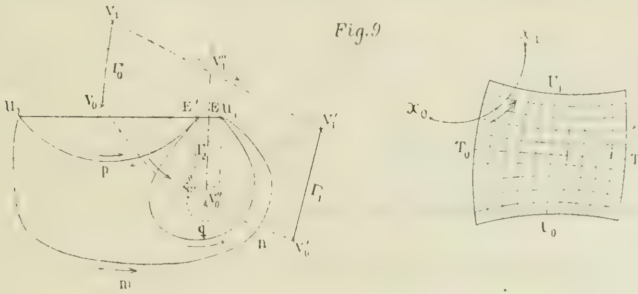
$$\int_{u_0}^{u_1} \Pi(x,\ u)du$$

par la même intégrale prise suivant le chemin u_0mu_1, qui n'est pas atteint par cette coupure. Lorsque le point x sera venu en x_1 et la coupure Γ en Γ_1, l'intégrale curviligne (u_0mu_1) n'aura pas cessé d'avoir un sens et l'application du théorème de Cauchy montre que cette intégrale est encore égale à l'intégrale rectiligne (u_0u_1); de sorte que la fonction est encore égale à $\Phi(x)$ aux environs du point x_1. Le même mode de raisonnement s'applique au côté T_1, et par raison de symétrie il en est évidemment de même des côtés U_0, U_1; ce qu'on pourrait d'ailleurs démontrer directement en renversant l'ordre des intégrations. Il résulte de l'étude qui vient d'être faite que les seuls chemins fermés qui puissent ne pas ramener $\Phi(x)$ à sa valeur initiale sont ceux qui traversent deux côtés différents du quadrilatère; ce qui revient à dire que les seuls points singuliers de cette fonction à l'intérieur de C sont les quatre sommets S_0, S_1, S_2, S_3.

10. Il suffit évidemment de savoir ce qui arrive lorsque la variable traverse deux côtés consécutifs; je prends par exemple les côtés T_0, U_1; la figure suivante montre le déplacement correspondant de Γ.

Avant que la coupure Γ n'ait atteint la ligne u_0u_1, remplaçons l'intégrale rectiligne (u_0u_1) par l'intégrale curviligne (u_0mnu_1), qui est

égale à la précédente et qui ne cesse pas d'avoir un sens. Considérons la position Γ_2 occupée par Γ un peu avant que x n'ait atteint le côté



U_1; Γ_2 coupe u_0u_1 en un point e infiniment rapproché de u_1. Soit e' un nouveau point de cette ligne infiniment voisin de e. On peut encore remplacer (u_0mnu_1) par la somme des deux intégrales $(u_0pe') + (e'qu_1)$, dont la première peut être réduite à l'intégrale rectiligne (u_0e'). Le chemin $e'qu_1$ peut à son tour être réduit à deux lignes infiniment rapprochées de la coupure Γ_2 et à un cercle de rayon infiniment petit ρ décrit autour du point v_0''. Or, le long de la coupure Γ, $H(x, u)$ prend de part et d'autre de cette ligne des valeurs dont la différence est $2i\pi R(x, u)$; on aura donc

$$\int_{(e'qu_1)} H(x, u)du = 2i\pi\int_{e'}^{e''} R(x, u)du + \int_{(\rho)} H(x, u)du.$$

Dans le voisinage du point v_0 on sait que $H(x, u)$ est de la forme

$$R(x, u)L(u - v_0) + P(u);$$

l'intégrale

$$\int_{(\rho)} P(u)du$$

est égale, d'après les notations adoptées, à $2i\pi\lambda_0(x)$. Quant à l'intégrale

$$\int_{(\rho)} R(x, u)L(u - v_0)du,$$

$R(x, u)$ étant holomorphe pour $u = v_0$, on vérifie facilement qu'elle est infiniment petite avec ρ. Soit en effet $f(u)$ une fonction holomorphe de u dans le domaine d'un point a

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} A_\nu (u - a)^\nu;$$

posons

$$F(u) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} A_\nu \frac{(u-a)^{\nu+1}}{\nu + 1}, \qquad F_1(u) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} A_\nu \frac{(u-a)^{\nu+1}}{(\nu + 1)^2}.$$

Dans le domaine du point a, on aura

$$\int f(u) L(u-a) du = F(u) L(u-a) - F_1(u) + C,$$

et cette intégrale, prise le long d'un cercle de rayon ρ, à partir d'un point α sera égale à

$$[F(u) L(u-a)]_\alpha^\alpha,$$

où à $2i\pi F(\alpha)$; ce résultat est, comme on voit, infiniment petit avec ρ. On a donc, en supposant ρ infiniment petit, c'est-à-dire $e'' = v_0''$,

$$\int_{(e'qu_1)} \Pi(x, u) du = 2i\pi \left[\int_{e'}^{v_0''} R(x, u) du + \lambda_0(x) \right].$$

La coupure continuant à se déplacer de Γ_2 en Γ_1, la quantité contenue dans le second membre de l'égalité précédente conserve un sens, et quand x sera venu en x_1 la continuation analytique de $\Phi(x)$ sera représentée par

$$(u_0 e') + 2i\pi \left[\int_{e'}^{v_0} R(x, u) du + \lambda_0(x) \right],$$

où l'on doit maintenant faire $u_1 - e'$ infiniment petit; ce qui conduit à remplacer $\Phi(x)$ par

$$\Phi(x) + 2i\pi \int_{u_1}^{v_0} R(x, u) du + 2i\pi\lambda_0(x).$$

Les autres cas s'étudient de la même manière et conduisent à des résultats

analogues. En résumé, la variable franchissant l'espace E, la fonction égale à $\Phi(x)$ au point de départ est égale au point d'arrivée à $\Phi(x) + 2i\pi\varphi(x)$, $\varphi(x)$ ayant l'une des valeurs suivantes, d'après le chemin décrit par la variable:

x franchissant les côtés T_0, U_1, on a $\varphi_1(x) = \int_{u_1}^{v_0} R(x, u)du + \lambda_0(x)$,

. . . . U_1, T_1, ... $\varphi_2(x) = \int_{v_1}^{u_1} R(x, u)du + \lambda_1(x)$,

. . . . T_1, U_0, ... $\varphi_3(x) = \int_{u_0}^{v_1} R(x, u)du - \lambda_1(x)$,

. . . . U_0, T_0, ... $\varphi_0(x) = \int_{v_0}^{u_0} R(x, u)du - \lambda_0(x)$.

Comme conséquences, on déduit de là que si on fait franchir à la variable x les deux côtés U_1, U_0 successivement, $\Phi(x)$ se trouvera augmentée de $2i\pi[\varphi_2(x) + \varphi_3(x)] = 2i\pi\int_{u_0}^{u_1} R(x, u)du$. Si la variable franchit les côtés T_0, T_1 successivement, $\Phi(x)$ sera augmentée de

$$2i\pi[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = 2i\pi\Big[\int_{v_1}^{v_0} R(x, u)du + \lambda_0(x) + \lambda_1(x)\Big].$$

Ce dernier résultat est aisé à vérifier directement; on a vu plus haut que la coupure mobile va de Γ_0 en Γ_1 (fig. 10), et l'intégrale rectiligne (u_0u_1) est remplacée par l'intégrale (u_0mu_1), qui est égale à l'intégrale rectiligne ou $\Phi(x)$, augmentée de l'intégrale

$$\int H(x, u)du,$$

prise le long d'un contour C environnant la coupure Γ_1 dans le sens direct. Ce dernier contour peut être réduit à deux circonférences de rayons infiniment petits ayant

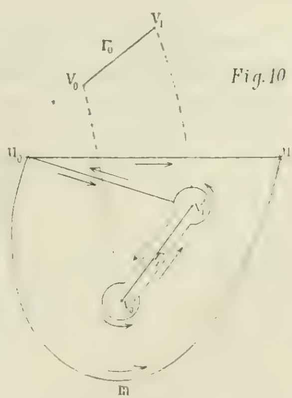


Fig. 10

pour centres les points v'_0, v'_1 et à deux lignes infiniment rapprochées de la coupure. On trouve comme tout-à-l'heure que la partie de l'intégrale relative aux petites circonférences est égale à $2i\pi[\lambda_0(x)+\lambda_1(x)]$, et que la partie provenant des autres lignes est $2i\pi\int_{v_1}^{v_0} R(x, u)du$.

11. Soit $n = 1$; on a alors

$$R(x, u) = \frac{F(x, u, t)}{\frac{\partial G}{\partial t}},$$

en supposant qu'on ait remplacé t par sa valeur tirée de l'équation $G(x, u, t) = 0$. Les résidus $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$ sont nuls et les valeurs de $\varphi(x)$ se simplifient. Si la variable franchit les côtés U_1, U_0, $\Phi(x)$ se trouve augmentée de

$$2i\pi\int_{u_0}^{u_1} \frac{F(x, u, t)}{\frac{\partial G}{\partial t}}du,$$

et si x franchit les côtés T_0, T_1, $\Phi(x)$ se trouve augmentée de

$$2i\pi\int_{v_1}^{v_0} \frac{F(x, u, t)}{\frac{\partial G}{\partial t}}du.$$

Ici une vérification s'offre d'elle-même. Supposons en effet qu'on ait effectué les intégrations dans l'ordre inverse; on aurait trouvé pour accroissement de $\Phi(x)$ lorsque x franchit les côtés T_0, T_1,

$$2i\pi\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x, u, t)dt}{\frac{\partial G}{\partial u}}.$$

On doit donc avoir

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x, u, t)dt}{\frac{\partial G}{\partial u}} = \int_{v_1}^{v_1} \frac{F(x, u, t)du}{\frac{\partial G}{\partial t}};$$

c'est en effet ce qui a lieu; car si dans la première intégrale on fait le changement de variable

$$t = \chi(x, u),$$

on retrouve identiquement la seconde. Ceci résulte de ce qu'aux limites t_0, t_1 pour t correspondent pour u les limites v_0, v_1 et de l'identité

$$\frac{\partial G}{\partial u} du + \frac{\partial G}{\partial t} dt = 0.$$

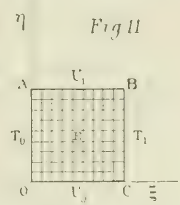
12. Comme application, je considère l'intégrale double

$$\Phi(x) = \int_0^1 du \int_0^1 \frac{dt}{t + iu - x},$$

qui rentre bien dans le cas de $n = 1$. Le quadrilatère E se compose ici d'un carré ayant pour sommets les points d'affixes 0, 1, i, $1 + i$, (fig. 11). Les diverses quantités qui figurent dans les formules ont respectivement les valeurs:

$$R(x, u) = 1, \qquad \lambda_0(x) = \lambda_1(x) = 0,$$
$$v_0 = -ix, \qquad v_1 = -ix + i;$$

Fig 11



par suite les φ auront les valeurs suivantes:

$$\varphi_0(x) = \int_{-ix}^{0} du = ix, \qquad \varphi_1(x) = \int_{1}^{-ix} du = -i(x - i),$$

$$\varphi_2(x) = \int_{-ix+i}^{1} du = i(x - 1 - i), \qquad \varphi_3(x) = \int_{0}^{-ix+i} du = -i(x - 1).$$

La vérification est immédiate, car un calcul élémentaire donne

$$\Phi(x) = i\left[(x-1-i)L(x-1-i) + xL(x) - (x-1)L(x-1) - (x-i)L(x-i)\right].$$

13. Dans le cas de $n = 2$, les résidus $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$ ne seront plus nuls en général et on trouve pour leurs expressions (voir n° 2)

$$\lambda_0(x) = \frac{F(x, u, t)}{\frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial t}},$$

où on a remplacé t par t_0 et u par v_0, et pour $\lambda_1(x)$ une expression analogue. Soit, par exemple,

$$\Phi(x) = \int_0^1 du \int_0^1 \frac{dt}{(t + iu - x)^2};$$

le quadrilatère E est le même que tout-à-l'heure. On a ici

$$R(x, u) = 0, \quad \lambda_0(x) = -i, \quad \lambda_1(x) = i, \quad v_0 = -ix, \quad v_1 = -ix + i;$$

et par suite:

$$\varphi_0(x) = \varphi_2(x) = i, \qquad \varphi_1(x) = \varphi_3(x) = -i.$$

Les résultats sont encore faciles à vérifier, car on trouve

$$\Phi(x) = iL\left[\frac{x(x - 1 - i)}{(x - i)(x - 1)}\right].$$

Remarque. Chacune des fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ étant holomorphe à l'intérieur de C, la différence

$$\Phi(x) - \sum_{i=0}^{i=3} \varphi_i(x) L(x - S_i)$$

sera, d'après ce qui précède, une fonction uniforme $\Psi(x)$ à l'intérieur du même contour, qui ne peut présenter de discontinuité qu'aux points S_0, S_1, S_2, S_3. Par une méthode analogue à celle qui a été employée au n° 3, on reconnait que chacun de ces points est un pôle d'ordre $n - 2$ pour $\Psi(x)$; dans les deux cas particuliers de $n = 1$ et de $n = 2$, ces points sont des points ordinaires: ce qui est bien d'accord avec les résultats précédents.

14. Soit $f(t)$ une fonction rationnelle de t dont les coefficients ne contiennent ni u ni x et qui n'admet, pour fixer les idées, que des pôles simples:

$$f(t) = \frac{R_1}{t - p_1} + \frac{R_2}{t - p_2} + \ldots + \frac{R_n}{t - p_n}.$$

Considérons l'intégrale double

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^l f(u + t - x) dt,$$

où les intégrations sont effectuées pour u le long de l'axe réel, et pour t le long d'une ligne droite joignant l'origine au point d'affixe $l = \alpha + \beta i$. Soit $p = a + ib$ un pôle de $f(t)$; l'intégrale double précédente n'aura aucun sens pour toutes les valeurs de x à l'intérieur de la bande indéfinie comprise entre deux parallèles à l'axe réel menées par les points d'affixes p et $p + l$. Soient

$$p_1 = a_1 + ib_1, \qquad p_2 = a_2 + ib_2, \; \ldots, \; p_n = a_n + ib_n,$$

les pôles de $f(t)$, rangés par ordre des coefficients de i croissants, et supposons que la différence $b_{i+1} - b_i$ soit toujours supérieure à β. A chacun de ces pôles correspondra une bande et deux bandes consécutives n'empiéteront jamais l'une sur l'autre. Le plan se trouve ainsi divisé en $n + 1$ parties non connexes entre elles. On reconnaît d'abord que $\Phi(x)$ est constant dans chacune de ces parties; si on l'écrit en effet

$$\Phi(x) = \int_0^l dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + t - x)\,du,$$

on aura

$$\Phi'(x) = -\int_0^l dt \int_{-\infty}^{+\infty} f'(u + t - x)\,du;$$

$f(\infty)$ étant nul, comme il est nécessaire de le supposer, on voit que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(u + t - x)\,du$$

est nulle pour toute valeur de x et de t et par suite on a $\Phi'(x) = 0$. Mais cette constante sera variable d'un intervalle à une autre. En premier lieu, pour savoir sa valeur lorsque x est dans la partie au-dessous de la première bande ou au-dessus de la dernière, on peut faire $x = \infty$; ce qui donne $\Phi(x) = 0$. Pour calculer l'accroissement de $\Phi(x)$ lorsque la variable traverse la bande correspondant au pôle p_i en passant de l'intervalle situé au-dessous à l'intervalle situé au-dessus, on peut, soit considérer ce cas comme limite du cas général, soit faire le raisonnement

directement, et on trouve pour valeur de cet accroissement $2i\pi\int_{v_0}^{v_1} R_i du$. Ici $v_0 = x$, $v_1 = x - l$, et par suite

$$\int_{v_0}^{v_1} R_i du = -lR_i.$$

Il en résulte que dans le premier intervalle on aura $\Phi(x) = -2i\pi l R_1$, dans le second $\Phi(x) = -2i\pi l(R_1 + R_2), \ldots$ et enfin au dessus de la dernière coupure $\Phi(x) = -2i\pi l(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)$. Comme on doit avoir dans cette partie du plan $\Phi(x) = 0$, on retrouve la condition connue

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n = 0.$$

En remplaçant les constantes R par des fonctions de x on parvient à l'expression, sous forme d'intégrale double, d'une fonction qui coïncide avec $n - 1$ fonctions données tout-à-fait arbitraires à l'intérieur de $n - 1$ intervalles séparés par des bandes de largeur finie, et non par de simples coupures. (Voir HERMITE, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*. Journal de BORCHARDT, T. 91, p. 69.)

Des faits analogues ont lieu apparemment pour des intégrales définies multiples à un nombre quelconque de variables. Le quadrilatère E sera remplacé, autant que j'ai pu le voir, par un polygone d'un nombre 2^n de côtés pour les intégrales multiples d'ordre n.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont paru dans une note, présentée à l'Académie des Sciences le 30 Avril 1883.

Toulouse, Octobre 1883.

SUR LES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES INDÉFINIES
À INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES
ET SUR LES FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES CORRESPONDANTES.

PAR

EMILE PICARD

À PARIS.

Dans le tome 1er de ce recueil, j'ai rapidement montré comment les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et à coefficients entiers pouvaient conduire à une classe étendue de groupes discontinus de substitutions linéaires pour le cas de deux variables; j'ai fait voir en outre que l'on pouvait former des fonctions de deux variables indépendantes qui ne changent pas quand on effectue sur les variables une substitution quelconque du groupe. Je donnerai dorénavant à de telles fonctions le nom de *fonctions hyperfuchsiennes*, indiquant ainsi l'analogie qui existe entre ces fonctions de deux variables indépendantes et les fonctions d'une variable qui ont été appelées *fuchsiennes* par M. Poincaré.

L'objet de ce mémoire est l'étude des principales propriétés des fonctions et des groupes hyperfuchsiens, dont l'existence seule a été établie dans le travail que je viens de rappeler. Je ne considère que le cas où la forme quadratique ternaire indéfinie a pour coefficients des nombres entiers complexes de la forme $a + bi$, mais on verrait facilement que des considérations analogues pourraient être appliquées si les coefficients étaient des entiers formés avec les racines d'une équation du second degré à racines imaginaires.

J'ai dû commencer par faire l'étude arithmétique des formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées, et à ce point de vue ce travail est la suite de celui que j'ai publié dans les Annales de l'École Normale (Janvier et Février 1884) et où j'ai développé la théorie des formes binaires. Le premier chapitre a pour objet cette étude arithmétique, dans le second et le troisième je m'occupe particulièrement du groupe hyperfuchsien que je fais correspondre à toute forme indéfinie, et enfin le quatrième chapitre est consacré à l'examen des propriétés les plus importantes et les plus simples des fonctions hyperfuchsiennes.

I.

1. Considérons la forme quadratique ternaire à indéterminées x et x_0, y et y_0, z et z_0

$$(1) \qquad F = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y$$

où a, a' et a'' sont réels, les coefficients b et b_0, b' et b'_0, b'' et b''_0 sont des quantités imaginaires conjuguées, forme que nous désignerons par (a, a', a'', b, b', b''). On établit bien facilement que, si le discriminant de cette forme, c'est à dire la quantité réelle

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b'_0 \\ b''_0 & a' & b \\ b' & b_0 & a'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on peut la mettre sous l'une des formes suivantes

$$\pm (uu_0 + vv_0 + ww_0)$$

$$\pm (uu_0 + vv_0 - ww_0)$$

où u, v, w sont des expressions linéaires en x, y, z et indépendantes. Soit

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z$$
$$v = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$
$$w = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Dans les deux premiers cas, la forme ayant un signe invariable est dite définie; dans les deux autres cas la forme est indéfinie.

Les résultats précédents donnent tout ce qui concerne l'équivalence algébrique des formes F; nous supposerons dans la suite que la forme F est indéfinie et à coefficients entiers, et qu'elle appartient au type

$$uu_0 + vv_0 - ww_0$$

c'est à dire qu'on peut la ramener à cette forme par une substitution linéaire.

2. Commençons par résondre le problème suivant: Trouver la transformation linéaire la plus générale transformant en elle-même

$$uu_0 + vv_0 - ww_0 .$$

Soit donc

$$(1)\qquad \begin{aligned} U &= Mu + Pv + Rw \\ V &= M'u + P'v + R'w \\ W &= M''u + P''v + R''w \end{aligned}$$

une substitution telle que

$$UU_0 + VV_0 - WW_0 = uu_0 + vv_0 - ww_0 .$$

On aura les relations

$$\begin{aligned} MM_0 + M'M'_0 - M''M''_0 &= 1 \\ PP_0 + P'P'_0 - P''P''_0 &= 1 \\ RR_0 + R'R'_0 - R''R''_0 &= -1 \\ MP_0 + M'P'_0 - M''P''_0 &= 0 \\ MR_0 + M'R'_0 - M''R''_0 &= 0 \\ PR_0 + P'R'_0 - P''R''_0 &= 0. \end{aligned}$$

Comme d'autre part les équations (1) résolues par rapport à u, v et w donnent

$$\begin{aligned} u &= M_0 U + M_0' V - M_0'' W \\ v &= P_0 U + P_0' V - P_0'' W \\ w &= - R_0 U - R_0' V + R_0'' W, \end{aligned}$$

ces six équations sont équivalentes à celles-ci:

$$\begin{aligned} MM_0 + PP_0 - RR_0 &= 1 \\ M'M_0' + P'P_0' - R'R_0' &= 1 \\ M''M_0'' + P''P_0'' - R''R_0'' &= -1 \\ M_0M' + P_0P' - R_0R' &= 0 \\ M_0M'' + P_0P'' - R_0R'' &= 0 \\ M_0'M'' + P_0'P'' - R_0'R'' &= 0. \end{aligned}$$

On tire de la quatrième et de la cinquième de ces équations

$$\frac{M_0}{P''R' - P'R''} = \frac{P_0}{M'R'' - M''R'} = \frac{R_0}{M'P'' - M''P'}.$$

Désignons par k la valeur commune de ces rapports: en portant les valeurs de M_0, P_0, R_0 dans la première équation, on aura

$$\begin{aligned} 1 = kk_0[&(M'M_0' + P'P_0' - R'R_0')(R''R_0'' - M''M_0'' - P''P_0'') \\ &- (M_0'M'' + P_0'P'' - R_0'R'')(M'M_0'' + P'P_0'' - R'R_0'')] \end{aligned}$$

et par conséquent $kk_0 = 1$.

Le système des six équations peut donc se remplacer par le suivant

$$M_0 = k(P''R' - P'R''), \quad P_0 = k(M'R'' - M''R'), \quad R_0 = k(M'P'' - M''P')$$

$$\begin{aligned} M'M_0' + P'P_0' - R'R_0' &= 1 \\ M''M_0'' + P''P_0'' - R''R_0'' &= -1 \\ M_0'M'' + P_0'P'' - R_0'R'' &= 0. \end{aligned}$$

3. Ceci posé, revenons *à la forme indéfinie F à coefficients entiers,* forme qui peut s'écrire

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0$$

où u, v et w ont les significations indiquées (§ 1), les α, β, γ n'étant pas nécessairement des entiers. En même temps que la forme indéfinie proposée, j'envisage la forme définie

$$\Phi = UU_0 + VV_0 + WW_0$$

où U, V, W sont les expressions linéaires en u, v, w définies dans le paragraphe précédent. On aura donc

$$\Phi = \text{Norme}(Mu + Pv + Rw) + \text{Norme}(M'u + P'v + R'w) \\ + \text{Norme}(M''u + P''v + R''w)$$

et d'après les relations auxquelles satisfont les M, P, R on peut écrire

$$\Phi = -(uu_0 + vv_0 - ww_0)(M''M''_0 + P''P''_0 - R''R''_0) \\ + 2(M''u + P''v + R''w)(M''_0u_0 + P''_0v_0 + R''_0w_0);$$

elle ne contient plus que les lettres M'', P'' et R'' d'ailleurs liées par la relation

$$M''M''_0 + P''P''_0 - R''R''_0 = -1.$$

On doit concevoir d'ailleurs que u, v et w sont remplacés par leur valeur en x, y et z; la forme Φ est donc une forme quadratique ternaire définie aux indéterminées conjuguées x, y, z, x_0, y_0, z_0. Elle renferme trois paramètres arbitraires M'', P'' et R'' liés par la relation écrite ci dessus.

Je ferai immédiatement la remarque suivante: En effectuant dans Φ une substitution S on obtiendra une nouvelle forme φ; soit de même f la transformée obtenue en faisant dans F la substitution S, on voit très facilement que φ peut se déduire de f d'après le mode même de formation de Φ au moyen de F.

4. Il est nécessaire de rappeler maintenant les résultats relatifs à la réduction des formes *définies*. En nous bornant aux formes quadratiques ternaires, on peut énoncer la proposition suivante: Étant donnée une forme quadratique ternaire définie à coefficients quelconques, on pourra toujours par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant un, transformer la forme en une forme équivalente ayant pour expression:

$$\mu_1 \,\text{Norme}(x + \varepsilon_{12} y + \varepsilon_{13} z) + \mu_2 \,\text{Norme}(y + \varepsilon_{23} z) + \mu_3 \,\text{Norme}\, z$$

où μ_1, μ_2, μ_3 sont positifs avec les conditions

$$\mu_2 \geqq \frac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \frac{1}{2}\mu_2.$$

Dans chacune des quantités complexes ε, la partie réelle et la partie imaginaire ne surpassent pas $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

On donne le nom de *réduites* aux formes jouissant de ces propriétés et on établit qu'une forme définie donnée n'est arithmétiquement équivalente qu'à un nombre limité de formes réduites.

Le procédé de réduction, conduisant au théorème qui vient d'être énoncé, est dû à MM. Korkine et Zolotareff (Mathematische Annalen t. 6). Il s'étend d'ailleurs à un nombre quelconque de variables. On trouvera développée cette théorie de la réduction des formes quadratiques *définies* à indéterminées conjuguées dans le beau mémoire de M. Jordan sur l'équivalence des formes algébriques (Journal de l'Ecole Polytechnique t. 29).

Reprenons la forme définie Φ du paragraphe précédent, elle ne sera pas réduite en générale; supposons que pour certaines valeurs des paramètres on cherche une substitution à coefficients entiers qui la réduise; cette substitution réduira Φ tant que les paramètres M'', P'' et R'' satisferont à certaines conditions. Si on suppose que ces paramètres varient d'une manière continue (en satisfaisant, bien entendu, à la relation indiquée), il faudra à un certain moment employer une autre substitution pour réduire Φ, et c'est à ces opérations de réductions successives de la forme Φ quand M'', P'' et R'' varient d'une manière continue que nous donnons le nom de réduction continuelle de cette forme.

Nous dirons qu'une forme indéfinie F est réduite, quand la forme définie correspondante Φ est elle-même réduite pour certaines valeurs des paramètres M'', P'' et R''. Le premier point à établir est *que le nombre des formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme donnée est fini.*

5. Cherchons quelles relations d'inégalités entre les coefficients entraîne la condition qu'une forme définie est réduite. Soit:

$$Axx_0 + A'yy_0 + A''zz_0 + Byz_0 + B_0y_0z + B'zx_0 + B'_0z_0x + B''xy_0 + B''_0x_0y$$

une telle forme, supposée positive; les valeurs de μ_1, μ_2, μ_3 et des ε en fonction des A et B se trouvent immédiatement. On en déduit les conditions suivantes: dans B'' et B' la partie réelle et le coefficient de i sont moindres en valeur absolue que $\frac{1}{2}A$; puis

$$AA' - B''B''_0 > \frac{1}{2}A^2;$$

dans $(AB - B''_0B'_0)$ la partie réelle et le coefficient de i sont moindres en valeur absolue que $\frac{1}{2}(AA' - B''B''_0)$ (cette dernière expression est nécessairement positive puisque la forme est définie). Enfin l'on a

$$(A'A - B''B''_0)^2 < 2A\Delta$$

en désignant par Δ le déterminant de la forme.

Ces diverses conditions d'inégalité expriment complètement que la forme est réduite. On peut en déduire d'autres: cherchons en particulier quelques fonctions des coefficients limités en fonction de l'invariant Δ.

On a, avec les notations du paragraphe 4,

$$\mu_2 \geqq \frac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \frac{1}{4}\mu_1$$

et comme $\Delta = \mu_1\mu_2\mu_3$, on en déduit

$$\mu_1^3 \leqq 2^3\Delta, \quad \mu_2^2\mu_1 \leqq 2\Delta, \quad \mu_2\mu_1^2 \leqq 4\Delta, \quad \mu_3\mu_1^2 \leqq 2\Delta.$$

Puisque $A = \mu_1$ on voit que A est limité en fonction de Δ, et il en est

alors de même de la partie réelle et de la partie imaginaire de B' et B''. Puisque

$$A'A - B''B''_0 < \sqrt{2A\Delta}$$

on en conclut que AA' est aussi limité;

or $$AA' = \mu_1(\mu_1 \text{ Norme } \varepsilon_{12} + \mu_2);$$

par suite $\mu_1\mu_2$ est également limité. On a de suite

$$\mu_1\mu_2 \leqq 2\Delta^{\frac{2}{3}}.$$

On voit aussi que $AA'A''$ est limité aussi que A^2A'' et il en est de même de la partie réelle et de la partie imaginaire dans BB', BB'' et $BB'B''$.

Je ferai encore la remarque que les produits

$$(AA'' - B'B'_0)(AA' - B''B''_0) \quad \text{et} \quad (AA' - B''B''_0)^2(A'A'' - BB_0)$$

sont limités et de même le produit

$$(AA' - B''B''_0)(AA'' - B'B'_0)(A'A'' - BB_0).$$

Démontrons le fait pour ce dernier produit; il peut s'écrire

$$A^2A'^2A''^2 + BB_0 \,.\, B'B'_0 \,.\, B''B''_0 - A^2A'A''BB_0 - AA'A''^2B''B''_0$$
$$- AA''A'^2B'B'_0 + AA'BB_0B'B'_0 + AA''BB_0B''B''_0 + A'A''B'B'_0B''B''_0.$$

Tous les termes seront limités; prenons par exemple

$$A^2A''BB_0$$

qui sera

$$\mu_1^2(\mu_1 \mathrm{N}\,\varepsilon_{12} + \mu_2)(\mu_1 \mathrm{N}\,\varepsilon_{13} + \mu_2 \mathrm{N}\,\varepsilon_{23} + \mu_3)\,\mathrm{N}\,(\mu_1\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} + \mu_2\varepsilon_{23});$$

c'est un polygone en μ_1, μ_2 et μ_3, contenant des termes qui sont tous limités.

Nous signalerons encore les expressions

$$ABB_0, \qquad A'B'B'_0, \qquad A''B''B''_0$$

et, je le repète, toutes les expressions qui viennent d'être indiquées sont limitées en fonction de l'invariant Δ.

6. Revenons maintenant à la forme définie Φ associée à la forme indéfinie F (paragraphe 3).

Nous avons

$$\Phi = -(uu_0 + vv_0 - ww_0)(M''M''_0 + P''P''_0 - R''R''_0)$$
$$+ 2(M''u + P''v + R''w)(M''_0 u_0 + P''_0 v_0 + R''_0 w_0)$$

et soit en développant

$$\Phi = Axx_0 + A'yy_0 + A''zz_0 + Byz_0 + B_0 y_0 z + B'zx_0 + B'_0 z_0 x$$
$$+ B''xy_0 + B''_0 x_0 y.$$

Tout d'abord les coefficients de xx_0, yy_0 et zz_0 dans F sont inférieurs en valeur absolue aux coefficients correspondants de Φ. Prenons par exemple a, on aura

$$a = \alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0$$

et on a

$$A = \alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0 + 2\,\text{Norme}(M''\alpha + P''\alpha' + R''\alpha'')$$

et le fait apparait immédiatement si a est positif. Si a est négatif on remarquera que A peut s'écrire

$$A = -(\alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0) + 2\,\text{Norme}(M\alpha + P\alpha' + R\alpha'')$$
$$+ 2\,\text{Norme}(M'\alpha + P'\alpha' + R'\alpha'')$$

et par suite on peut écrire dans tous les cas

$$|a| \leqq A, \quad |a'| \leqq A', \quad |a''| \leqq A''$$

en entendant par $|a|$ la valeur absolue de a.

Or en désignant par $-\Delta$ le discriminant évidemment négatif de F, le discriminant de Φ sera Δ.

Si la forme F *est réduite,* la forme Φ sera réduite pour certaines valeurs de M'', P'' et R''. Les expressions A, AA', A^2A'', $AA'A''$ étant alors limitées en fonction de Δ, il en sera de même de

$$a, \quad aa', \quad a^2a'' \quad \text{et} \quad aa'a''.$$

Je dis encore que l'on a

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
(aa' - b''b''_0) &\leq AA' - B''B''_0 \\
(aa'' - b'b'_0) &\leq AA'' - B'B'_0 \\
(a'a'' - bb_0) &\leq A'A'' - BB_0 .
\end{aligned}
$$

Il suffit évidemment de montrer qu'il en est ainsi pour les deux formes

$$
\begin{gathered}
uu_0 + vv_0 - ww_0 \\
uu_0 + vv_0 + ww_0 ,
\end{gathered}
$$

or on a, dans la première,

$$
\begin{aligned}
aa' - b''b''_0 = {} & (\alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0)(\beta\beta_0 + \beta'\beta'_0 - \beta''\beta''_0) \\
& - \text{Norme}\,(\alpha\beta + \alpha'\beta' - \alpha''\beta'')
\end{aligned}
$$

et dans la seconde

$$
\begin{aligned}
AA' - B''B''_0 = {} & (\alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 + \alpha''\alpha''_0)(\beta\beta_0 + \beta'\beta'_0 + \beta''\beta''_0) \\
& - \text{Norme}\,(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'').
\end{aligned}
$$

Or on peut écrire

$$
\begin{aligned}
AA' - B''B''_0 = {} & \text{Norme}\,(\alpha\beta'_0 - \alpha'\beta_0) + \text{Norme}\,(\alpha'\beta''_0 - \alpha''\beta'_0) \\
& + \text{Norme}\,(\alpha''\beta_0 - \alpha\beta''_0)
\end{aligned}
$$

tandis que

$$
\begin{aligned}
aa' - b''b''_0 = {} & \text{Norme}\,(\alpha\beta'_0 - \alpha'\beta_0) - \text{Norme}\,(\alpha'\beta''_0 - \alpha''\beta'_0) \\
& - \text{Norme}\,(\alpha''\beta_0 - \alpha\beta''_0)
\end{aligned}
$$

et les inégalités annoncées deviennent évidentes.

On en conclut que

$$
aa' - b''b''_0, \quad (aa' - b''b''_0)(aa'' - b'b'_0), \quad (aa' - b''b''_0)^2(a'a'' - bb_0)
$$

sont limités en fonction de Δ, puisque les combinaisons analogues où les petites lettres sont remplacées par des grandes sont limitées.

Des inégalités (1) on déduit encore immédiatement que

$$abb_0, \quad a'b'b'_0, \quad a''b''b''_0 \quad \text{et Norme } bb'b''$$

sont limités en fonction de Δ.

Nous ajouterons enfin l'expression $a^2(aa''-b'b'_0)$ qui est limitée puisque $A^2(AA''-B'B'_0)$ est limité.

Nous nous proposons maintenant d'établir ce théorème fondamental *que le nombre des réduites ayant un déterminant donné est limité.*

7. Nous allons d'abord donner la démonstration en supposant que a n'est pas nul.

Les produits aa' et a^2a'' étant comme nous l'avons vu limités a, a' et a'' seront limités en fonction de Δ.

La norme de b sera aussi limitée puisque abb_0 l'est également.

Il en est de même de b'' et b' puisque nous avons montré que

$$aa'-b''b''_0 \quad \text{et} \quad a^2(aa''-b'b'_0)$$

sont limités.

Les six coefficients qui sont des entiers ont donc leur norme limitée en fonction du déterminant Δ, et *le théorème est alors établi.*

Tout ceci suppose essentiellement que a n'est pas nul; la démonstration est encore bien facile quand, a étant nul, le produit $b'b''$ est différent de zéro, car

$$a'b'b'_0, \quad a''b''b''_0 \quad \text{et} \quad bb'b''$$

étant limités, on conclut de suite que a', a'', b, b' et b'' sont limités.

Supposons maintenant que, a étant nul, l'un des coefficients b' ou b'' soit nul: soit par exemple $b'=0$ avec $a=0$.

Le déterminant de la forme se réduit à $-a''b''b''_0$; a'' et b'' sont donc limités et on voit que a'' sera positif. Il faut montrer que a' et b ne peuvent dépasser une certaine limite dépendant seulement de Δ. Nous remarquerons d'abord que la limitation de

$$(b''b''_0)^2(a'a''-bb_0)$$

nous montre que $a'a''-bb_0$ est limité.

Soit

$$F = a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b''xy_0 + b''_0x_0y$$

et posons $\delta = a'a'' - bb_0$ que, pour fixer les idées, nous supposerons positif: δ, comme nous venons de le dire, est limité. Nous pouvons écrire

$$a''F = (a''z + b_0y)(a''z + by_0) + \frac{1}{\delta}(\delta y + a''b''x)(\delta y_0 + a''b''_0x_0) - \frac{a''^2b''b''_0}{\delta}xx_0$$

et la forme Φ correspondant à la forme $a''F$, sera

$$\Phi = -a''(MM_0 + PP_0 - RR_0)(a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + a'yy_0 + b''xy_0 + b''_0x_0y)$$
$$+ 2\left[\frac{a''b''}{\sqrt{\delta}}(P + R)x + (Mb_0 + P\sqrt{\delta})y + Ma''z\right]$$
$$\times\left[\frac{a''b''_0}{\sqrt{\delta}}(P_0 + R_0)x_0 + (M_0b + P_0\sqrt{\delta})y_0 + M_0a''z_0\right]$$

en écrivant M, P, R au lieu de M'', P'', R'' comme nous l'avions fait plus haut. On a d'ailleurs

$$MM_0 + PP_0 - RR_0 = -1.$$

La forme Φ est définie pour certaines valeurs de M, P et R.

Le coefficient $\frac{2a''^2b''b''_0}{\delta}(P + R)(P_0 + R_0)$ de xx_0 est limité en fonction de l'invariant $a''^3\Delta$ de $a''F$; on a ainsi:

$$\frac{2a''^2b''_0b''}{\delta}(P + R)(P_0 + R_0) < 2a''\Delta.$$

Le coefficient de xz_0 dans F est $\frac{2a''^2b''}{\sqrt{\delta}}M_0(P + R)$; sa norme doit être plus grande que la moitié du carré du coefficient de xx_0. On a donc:

$$\frac{4a''^4b''b''_0}{\delta}MM_0(P + R)(P_0 + R_0) < 2\left(\frac{a''^2b''b''_0}{\delta}\right)(P + R)^2(P_0 + R_0)^2.$$

On déduit des inégalités précédentes que MM_0 est limité en fonction de Δ.

Or dans Φ le coefficient de zz_0 est

$$a''^2(MM_0 + RR_0 - PP_0)$$

ou bien

$$a''^2(2MM_0 + 1).$$

Ce coefficient est donc limité. Mais le coefficient de zz_0 étant limité dans Φ, il doit en être de même du coefficient de yy_0; en effet si on désigne par A, A' et A'' les coefficients de xx_0, yy_0 et zz_0 dans une forme définie réduite, on aura:

$$A' < 2A'' + \frac{A}{2},$$

comme il résulte immédiatement des conditions de la réduction; si donc A'' est limité, comme A l'est toujours, il en sera de même de A'; nous concluons de là que $a'a''$ est limité, par suite a' est limité, il en est alors de même de bb_0; *tous les coefficients sont donc encore limités.*

Il nous reste à examiner le cas où $a = b'' = 0$. On voit de suite que a' et b' sont limités, car le déterminant de la forme, qui est supposé différent de zéro, est égal à $-a'b'b'_0$. Nous avons à montrer que les deux autres coefficients a'' et b sont limités.

Soit

$$F = a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z;$$

on aura

$$\Phi = F + 2\,\text{Norme}\,[(M\alpha + P\alpha' + R\alpha'')x + (M\beta + P\beta' + R\beta'')y + (M\gamma + P\gamma' + R\gamma'')z].$$

Les équations de condition pour la réduction de la forme Φ donnent

$$\text{Norme}\,(M\beta + P\beta' + R\beta'') < \frac{1}{2}\,\text{Norme}\,(M\alpha + P\alpha' + R\alpha'')$$

et dans

$$\frac{1}{a'}\left(b - b'_0\frac{M\beta + P\beta' + R\beta''}{M\alpha + P\alpha' + R\alpha''}\right)$$

la partie réelle et le coefficient de i sont moindres que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue; des deux conditions précédentes on conclut que b est limité.

Il reste seulement à faire voir que a'' est limité; nous allons faire voir que $\delta = a'a'' - bb_0$ est limité. On va supposer dans ce calcul a' et δ positifs mais un calcul analogue peut être fait dans tous les cas.

Ecrivons

$$a'F = \text{Norme}(a'y + b_0 z) + \text{Norme}\left(\frac{a'b'x + \delta z}{\sqrt{\delta}}\right) - \text{Norme}\frac{a'b'x}{\sqrt{\delta}};$$

la forme Φ adjointe à $a'F$ sera

$$\Phi = (a'^2 yy_0 + a'a'' zz_0 + a'byz_0 + a'b_0 y_0 z + a'b'xz_0 + a'b'_0 x_0 z)(RR_0 - MM_0 - PP_0)$$
$$+ 2\,\text{Norme}\left[\frac{a'b'}{\sqrt{\delta}}(P + R)x + Ma'y + (Mb_0 + P\sqrt{\delta})z\right].$$

Le coefficient de xy_0 est

$$2\frac{a'^2 b'}{\sqrt{\delta}}(P + R)M_0$$

et celui de xx_0

$$2\frac{a'^2 b' b'_0}{\delta}(P + R)(P_0 + R_0).$$

Donc dans $b'\frac{M_0}{P_0 + R_0}$ le coefficient de i et la partie réelle sont moindres en valeur absolue que $\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\sqrt{\delta}}$.

Le coefficient de xz_0 est

$$a'b'(RR_0 - MM_0 - PP_0) + 2\frac{a'b'}{\sqrt{\delta}}(P + R)(M_0 b + P_0\sqrt{\delta})$$

ou

$$a'b'\left[RR_0 + PP_0 - MM_0 + 2RP_0 + \frac{2b}{\sqrt{\delta}}M_0(P + R)\right]$$

et dans cette expression le coefficient de i et la partie réelle sont moindres que

$$\frac{a'^2 b' b'_0}{\delta}(P + R)(P_0 + R_0).$$

Dans le quotient de ces deux quantités, la partie réelle est donc comprise entre -1 et $+1$. Or ce quotient peut s'écrire:

$$\frac{(P+R)(P_0+R_0)+P_0R-R_0P-MM_0+\frac{2b}{\sqrt{\delta}}M_0(P+R)}{\frac{a'b'_0}{\delta}(P+R)(P_0+R_0)}$$

et en posant $\frac{M}{P+R}=\lambda$, on aura donc

$$1-\lambda\lambda_0+\frac{2b}{\sqrt{\delta}}\lambda_0+\frac{2b_0}{\sqrt{\delta}}\lambda<\frac{a'\sqrt{b'b'_0}}{\delta}\sqrt{2}.$$

On a de plus

$$\lambda\lambda_0<\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta}.$$

On voit bien facilement que ces deux inégalités relatives à λ ne peuvent être vérifiées simultanément que si δ est limité en fonction de b, b' et a', et par suite de Δ. Le point λ doit en effet être intérieur au cercle

$$\lambda\lambda_0=\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta}$$

et extérieur au cercle

$$\lambda\lambda_0-2\lambda\frac{b_0}{\sqrt{\delta}}-2\lambda_0\frac{b}{\sqrt{\delta}}+\frac{a'\sqrt{2b'b'_0}}{\delta}-1=0.$$

Or ces deux cercles étant symétriques par rapport à l'axe réel, il faut et il suffit qu'une des racines de l'équation:

$$\lambda^2-\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta}$$

soit en dehors des racines de l'équation:

$$\lambda^2-2\lambda\frac{b+b_0}{\sqrt{\delta}}+\frac{a'\sqrt{2b'b'_0}}{\delta}-1=0,$$

Soit $\lambda = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta}}$, où $\varepsilon = \pm 1$, cette racine; le résultat de la substitution de cette valeur dans le premier membre de la seconde équation devra être positif; on aura alors

$$\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\delta} - 2\varepsilon\sqrt{\frac{b'b'_0}{2}}(b + b_0)\frac{1}{\delta} + \frac{a'\sqrt{2b'b'_0}}{\delta} - 1 > 0,$$

d'où l'on déduit que δ est limité.

En résumé nous pouvons énoncer le théorème suivant qui est fondamental.

Le nombre des réduites arithmétiquement équivalentes à une forme indéfinie, dont le déterminant n'est pas nul, est fini.

II.

8. Commençons par faire un changement dans les paramètres; cette substitution se fera bien simplement en remarquant que la forme Φ est homogène en M, P, R. Posons alors

$$\frac{M}{R} = \xi, \quad \frac{P}{R} = \eta.$$

Nous considérerons dorénavant la forme Φ

$$\Phi = -(uu_0 + vv_0 - ww_0)(\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - 1) + 2\,\text{Norme}(u\xi + v\eta + w)$$

et puisque on avait $MM_0 + PP_0 - RR_0 = -1$, on voit que les paramètres ξ, η devront satisfaire à la condition

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

Nous appellerons souvent dans la suite un système de valeurs (ξ, η), le point (ξ, η). L'ensemble des points (ξ, η) satisfaisant à une ou plusieurs condi-

tions d'inégalité formera ce que nous appellerons un *domaine* de points. Ainsi, par exemple, l'ensemble des points ξ, η pour lesquels

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 \leqq 1$$

formera un domaine que nous désignerons par S, et nous désignerons par *limite* ou *surface* du domaine S, l'ensemble des points tels que

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 = 1.$$

Certaines inégalités entre ξ et η exprimeront que la forme Φ est réduite, et si ces inégalités sont compatibles, elles définiront pour le point (ξ, η) un certain domaine D qui correspondra à la réduite indéfinie

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0.$$

Nous n'avons d'ailleurs à considérer que les parties du domaine D intérieures à S.

Ceci posé, je vais établir que *le domaine D ne peut avoir plus d'un point commun avec la surface de S.*

Désignons par $-\Delta$ le déterminant (qui est évidemment négatif) de la forme F; on voit d'abord que le déterminant de la forme Φ est égal à

$$\Delta(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)^3.$$

Or dans une forme définie réduite, le coefficient de xx_0 est moindre que deux fois la racine cubique du déterminant (voir paragraphe 5); nous aurons par suite en conservant les notations précédemment adoptées

$$2\,\text{Norme}(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha'') + a(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) \leqq 2\Delta^{\frac{1}{3}}(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)$$

et on conclut de cette égalité que si le point (ξ', η') appartient à la limite de S on aura

$$\alpha\xi' + \alpha'\eta' + \alpha'' = 0.$$

D'autre part en désignant comme précédemment par (A, A', A'', B, B', B'') une forme définie réduite, on peut écrire, comme on sait, cette forme de la façon suivante:

$$\mu_1\,\text{Norme}(x + \varepsilon_1 y + \varepsilon_2 z) + \mu_2\,\text{Norme}(y + \varepsilon_3 z) + \mu_3 zz_0$$

où les μ et ε satisfont aux conditions rappelées.

Or on a

$$\mu_1 = A$$

$$\mu_2 = A' - \frac{B''B''_0}{A}$$

$$\mu_3 = A'' - \frac{B'B'_0}{A} - \frac{AB - B''_0B'_0}{AA' - B''B''_0}\left(B_0 - \frac{B''B'}{A}\right)$$

et on a vu que

$$\text{Norme}\frac{B'}{A} < \frac{1}{2}, \quad \text{Norme}\frac{AB - B''_0B'_0}{AA' - B''B''_0} < \frac{1}{2}.$$

Considérons toujours un point du domaine D, qui appartienne à la surface de S; comme nous venons de le voir on a pour ce point (ξ', η')

$$\alpha\xi' + \alpha'\eta' + \alpha'' = 0.$$

Alors μ_1 devient nul et on voit que μ_2 et μ_3 se réduisent respectivement à

$$A' \quad \text{et} \quad A'' - \lim B_0 . \frac{AB - B''_0B'_0}{AA' - B''B''_0}.$$

Nous supposons que le point (ξ, η) restant toujours dans le domaine D tende suivant une loi arbitraire vers le point (ξ', η'); c'est dans ces conditions qu'il faut entendre le signe limite contenu dans l'expression précédente; les autres termes disparaissent car

$$\lim \frac{B''B''_0}{A} = 0 \ \text{ puisque } \ \text{Norme}\frac{B''}{A} < \frac{1}{2} \ \text{ et } \ \lim B'' = 0$$

et de même pour les autres.

Mais la forme Φ se réduit pour $\xi = \xi'$ et $\eta = \eta'$ à

$$2\,\text{Norme}\left[(\beta\xi' + \beta'\eta' + \beta'')y + (\gamma\xi' + \gamma'\eta' + \gamma'')z\right].$$

Or son déterminant est nul; donc pour $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ on a

$$\mu_2\mu_3 = 0.$$

On a par suite $\mu_2 = 0$, l'hypothèse $\mu_3 = 0$ donnant aussi $\mu_2 = 0$ puisque $\mu_3 > \frac{1}{2}\mu_2$.

On a par suite

$$\beta\xi' + \beta'\eta' + \beta'' = 0,$$

et cette égalité jointe à

$$\alpha\xi' + \alpha'\eta' + \alpha'' = 0$$

déterminent complètement ξ' et η'; *il ne peut donc y avoir plus d'un point du domaine D appartenant à la surface de S.*

9. A chaque réduite ne correspondra pas d'ailleurs évidemment un tel point; il est nécessaire pour cela que les valeurs de ξ' et η' tirées des deux équations précédentes satisfassent à la relation

$$\xi'\xi'_0 + \eta'\eta'_0 - 1 = 0.$$

Approfondissons maintenant la signification de l'équation de condition à laquelle on est ainsi conduit. En résolvant les deux premières équations et portant les valeurs de ξ' et η' dans la troisième, on a:

$$\text{Norme}(\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + \text{Norme}(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') - \text{Norme}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0.$$

Or désignons comme précédemment la forme par

$$F = (a,\ a',\ a'',\ b,\ b',\ b'')$$

on a

$$a = \alpha\alpha_0 + \alpha'\alpha'_0 - \alpha''\alpha''_0$$

$$a' = \beta\beta_0 + \beta'\beta'_0 - \beta''\beta''_0$$

et

$$b'' = \alpha\beta_0 + \alpha'\beta'_0 - \alpha''\beta''_0.$$

En formant l'expression $b''b''_0 - a'a$, on trouve:

$$b''b''_0 - a'a = \text{Norme}(\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + \text{Norme}(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') - \text{Norme}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$

et l'on voit par conséquent que:

$$b''b''_0 - a'a = 0.$$

Ainsi les réduites pour lesquelles cette relation est vérifiée sont les seules pour lesquelles le domaine D peut avoir un point commun avec la limite du domaine S.

Mais ce n'est pas tout; je dis que *a doit être nul.* Considérons en effet une réduite dans laquelle a n'est pas nul; nous avons vu précédemment que dans ce cas les coefficients de xx_0, yy_0 et zz_0 sont limités, par suite

$$M\alpha + P\alpha' + R\alpha'', \quad M\beta + P\beta' + R\beta'' \quad \text{et} \quad M\gamma + P\gamma' + R\gamma''$$

sont limités en fonction de Δ: M, P et R ne peuvent donc dépasser une certaine limite et par suite le point $\xi = \frac{M}{R}$, $\eta = \frac{P}{R}$ est intérieur au domaine S; il n'a aucun point commun avec la surface de ce domaine, car de tels points correspondent à des valeurs infiniment grandes de R.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui est fondamental:

Les réduites pour lesquelles $a = 0$, $b'' = 0$ sont les seules pour lesquelles le domaine correspondant D peut avoir un point commun avec la surface de S.

10. Nous allons montrer maintenant qu'aux réduites, dont il vient d'être question, correspondent bien effectivement des domaines D ayant un point commun avec la surface de S.

Soit donc comme précédemment une forme dans laquelle $a = 0$, $b'' = 0$, et que nous supposons réduite (voir paragraphe 7, le cas où $a = 0$, $b'' = 0$). Supposant comme précédemment que $\delta = a'a'' - bb_0$ est positif, nous avons

$$a'F = \text{Norme}\,(a'y + b_0 z) + \text{Norme}\left(\frac{a'b'x + \delta z}{\sqrt{\delta}}\right) - \text{Norme}\,\frac{a'b'x}{\sqrt{\delta}}$$

et nous prenons la forme Φ associée à $a'F$ avec les paramètres ξ et η

$$\Phi = a'F(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) + 2\,\text{Norme}\left[\frac{a'b'}{\sqrt{\delta}}(\eta + 1)x + a'\xi y + (\xi b_0 + \eta\sqrt{\delta})z\right].$$

La forme F étant réduite, il existe des valeurs de ξ et η pour lesquelles Φ est réduite, et il faut montrer que le domaine D de ces valeurs a un point commun avec la limite de S.

Les conditions de réduction pour Φ apprennent de suite que dans $b'\frac{\xi_0}{\eta_0 + 1}$ le coefficient de i et la partie réelle sont moindres que $\frac{1}{2}\frac{b'b'_0}{\sqrt{\delta}}$ en valeur absolue; puis dans

$$a'b'\left[1 + \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} - \frac{\xi\xi_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} + \frac{2b}{\sqrt{\delta}}\frac{\xi_0}{1+\eta_0}\right]$$

la partie réelle et le coefficient de i sont moindres en valeur absolue que $\frac{a'^2b'b'_0}{\delta}$. Nous voyons encore que dans

$$\frac{1}{a'}\left(b - b'_0\frac{\xi}{\eta + 1}\right)$$

la partie réelle et le coefficient de i sont moindres que $\frac{1}{2}$.

Les trois conditions précédentes expriment que dans Φ mis sous la forme canonique

$$\mu_1 \text{Norme}(x + \varepsilon y + \varepsilon' z) + \mu_2 \text{Norme}(y + \varepsilon'' z) + \mu_3 \text{Norme}\, z,$$

ε, ε' et ε'' ont leur partie réelle et leur coefficient de i compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Il reste à écrire les deux autres conditions qui expriment que $\mu_2 < \frac{1}{2}\mu_1$ et $\mu_3 < \frac{1}{2}\mu_2$. On obtient ainsi:

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{b'b'_0}{\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

et

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{a'^3b'b'_0}{\Delta\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1).$$

Je dis d'abord qu'il existe dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = -1$, des valeurs de ξ, η satisfaisant à la première série de conditions. En effet puisque la forme Φ est définie pour certaines valeurs de ξ et η, il existe des valeurs de

$$\frac{\xi}{1+\eta} \quad \text{et} \quad \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)}$$

satisfaisant aux trois premières conditions: on remarque d'ailleurs que les trois premières conditions ne dépendent que de ces quantités. Soient donc

$$\frac{\xi}{1+\eta} = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} = \mu$$

deux valeurs convenables de λ et μ; nous allons montrer qu'il existe dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = -1$ des valeurs de ξ et η donnant à

$$\frac{\xi}{1+\eta} \quad \text{et} \quad \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)}$$

des valeurs très peu différentes de λ et μ, et ces valeurs de ξ et η satisferont par suite aux trois premières conditions. Soit en effet $\eta = \alpha + i\beta$.

On aura

$$\frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} = \frac{2i\beta}{(1+\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Or faisons tendre α vers -1 et β vers zéro de telle sorte que $\frac{2i\beta}{(1+\alpha)^2}$ tende vers μ; alors $\frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)}$ tendra vers μ quand η tendra vers -1 de la manière indiquée; il suffit de prendre $\xi = \lambda(1+\eta)$, pour avoir, aussi rapproché que l'on veut de $\xi = 0$, $\eta = -1$, un système (ξ, η) satisfaisant aux trois premières conditions. Il importe de s'assurer que parmi ces valeurs de (ξ, η) il y en a pour lesquelles

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

Remarquons qu'on peut faire tendre β vers zéro et α vers -1, avec la condition que $\frac{\beta}{(1+\alpha)^2}$ ait une valeur donnée, de telle manière que $\alpha^2 + \beta^2$ soit moindre que l'unité. Soit donc η tellement choisi, l'égalité $\xi = \lambda(\eta + 1)$ donne une valeur correspondante de ξ; je dis que le point ξ, η est à l'intérieur du domaine S. Si on avait en effet

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 > 1$$

on aurait

$$\frac{\xi\xi_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} > \frac{1 - \eta\eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)} = \frac{1-\eta}{1+\eta_0} + \frac{\eta - \eta_0}{(1+\eta)(1+\eta_0)}.$$

Le second membre de l'inégalité est d'ailleurs positif. On voit alors que η tendant vers -1, la norme $\frac{\xi}{1+\eta}$ grandirait indéfiniment, ce qui est absurde.

Il existe donc dans le voisinage du point (o, — 1) une infinité de points ξ, η, pour lesquelles on a

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1$$

et qui satisfont aux trois premières conditions. Je dis maintenant que ces valeurs de ξ, η, si elles sont suffisamment rapprochées de $\xi = 0$, $\eta = -1$ satisferont aux deux autres conditions

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{b'b'_0}{\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{a'^3b'b'_0}{\Delta\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1).$$

S'il en était autrement en effet, il y aurait sur l'une ou l'autre des deux surfaces

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 = \frac{b'b'_0}{\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 = \frac{a'^3b'b'_0}{\Delta\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

des points aussi rapprochés que l'on voudrait de $\xi = 0$, $\eta = -1$, et satisfaisant aux trois premières conditions. Or pour de tels points on aurait manifestement

$$\frac{\xi\xi_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)} = \frac{1 - \eta\eta_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)} + A$$

où A est une constante, et en remarquant que:

$$\frac{1 - \eta\eta_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)} = \frac{1 - \eta}{1 + \eta_0} + \frac{\eta - \eta_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)}$$

on voit que $\frac{\xi}{1 + \eta}$ augmenterait indéfiniment, puisque $\frac{\eta - \eta_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)}$ reste fini quand η tend vers -1, les trois premières conditions étant vérifiées. Nous arrivons donc encore à une contradiction.

Il résulte de cette discussion([1]) *qu'à toute réduite dans laquelle* $a = 0$ *et* $b'' = 0$ *correspond bien effectivement un domaine D ayant un point commun avec la surface de S.*

11. Nous avons maintenant à rechercher s'il existe toujours, quelle que soit la forme donnée, des réduites arithmétiquement équivalentes et dans lesquelles a et b'' soient nuls. Nous allons démontrer qu'il en est ainsi.

Commençons par établir qu'il existe des formes arithmétiquement équivalentes à une forme donnée f et dans laquelle le coefficient de xx_0 est nul. Si l'on fait dans f la substitution

$$x = MX + M_1 Y + M_2 Z$$

$$y = PX + P_1 Y + P_2 Z$$

$$z = QX + Q_1 Y + Q_2 Z$$

il est clair que le coefficient de XX_0 dans la transformée sera:

$$f(M, P, Q).$$

Il s'agit donc de voir si en donnant aux indéterminées x, y, z des valeurs entières et premières entre elles M, P, Q, la forme f peut s'annuler. En d'autres termes nous allons montrer que zéro peut être représenté par une forme quadratique ternaire indéfinie à indéterminées conjuguées; c'est là un point qui distingue essentiellement la théorie de ces formes de celle des formes ternaires réelles, car on sait que Gauss a montré que zéro ne pouvait être représenté par toute forme ternaire indéfinie réelle (*Disquisitiones Arithmeticæ*, paragraphe 294). La cause de cette différence est dans le fait que l'on peut toujours satisfaire à la congruence (1)

$$xx_0 \equiv a \pmod b$$

([1]) Nous avons supposé que $\delta = a'a'' - bb_0$ était différent de zéro et positif. Dans tous les autres cas, des considérations toutes semblables, conduisent au même résultat.

quels que soient a et b (b étant seulement supposé non divisible par un carré) tandis qu'au contraire on sait que la congruence (voir sur ce sujet HERMITE, Journal de CRELLE, t. 47)

$$x^2 \equiv a \pmod b$$

n'a pas de solutions quels que soient a et b.

Nous montrerons au paragraphe suivant comment de ce théorème on déduit que zéro peut être représenté pour toute forme ternaire indéfinie à indéterminées conjuguées. J'admets pour le moment ce résultat et je vais en conclure *qu'il existe une réduite dans laquelle* $a = b'' = 0$.

D'après ce que nous venons de dire, on pourra faire une première transformation linéaire de déterminant un, donnant une transformée dans laquelle le coefficient de xx_0 est nul. Que l'on fasse alors dans la forme une substitution

$$(x,\ y,\ z,\ x,\ my + nz,\ py + qz)$$

on voit de suite que l'on peut choisir deux entiers m et p premiers entre eux tels que le coefficient de xy_0 soit nul; on déterminera alors n et q par la condition $mq - np = 1$.

Nous obtenons donc une forme arithmétiquement équivalente à la proposée dans laquelle $a = b'' = 0$; mais cette forme n'est pas nécessairement réduite. Nous pouvons supposer que dans cette forme l'expression $a'a'' - bb_0$ est différente de zéro et positive, car s'il en était autrement en faisant la substitution

$$(x,\ y,\ z,\ x + nz,\ y,\ z)$$

où n est un entier arbitraire, cette expression se transformant en

$$a'a'' - bb_0 + a'(b'n + b'_0 n_0)$$

on peut choisir n de manière qu'elle soit positive (car a' et b' ne sont pas nuls vu qu'alors le déterminant de la forme serait nul).

Nous avons donc une forme f

$$f = a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z$$

arithmétiquement équivalente à la proposée et dans laquelle on a $\delta = a'a'' - bb_0 > 0$. A la forme $a'f$ est associée la forme définie Φ (paragraphe 10)

$$\Phi = a'f(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) + 2\,\text{Norme}\left[\frac{a'b'}{\sqrt{\delta}}(\eta + 1)x + a'\xi y + (\xi b_0 + \eta\sqrt{\delta})z\right];$$

cette forme ne sera réduite pour aucune valeur (ξ, η) du domaine S si la forme indéfinie f n'est pas réduite. Quelle substitution faut il faire dans Φ et par suite dans f pour la réduire? Φ peut se mettre sous la forme canonique

$$\mu_1\,\text{Norme}(x + \varepsilon y + \varepsilon' z) + \mu_2\,\text{Norme}(y + \varepsilon'' z) + \mu_3 zz_0\,;$$

or nous avons vu (paragraphe 10) que les inégalités $\mu_2 \geqq \frac{1}{2}\mu_1$, $\mu_3 \geqq \frac{1}{2}\mu_2$ devenaient pour la forme Φ

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} 1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 &> \frac{b'b'_0}{\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1) \\ 1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 &> \frac{a'^3 b'b'_0}{\Delta\delta}(\eta + 1)(\eta_0 + 1). \end{aligned}$$

On peut toujours trouver des valeurs de ξ, η satisfaisant à ces inégalités; considérons en effet l'inégalité

$$(\beta)\qquad 1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > A(1 + \eta)(1 + \eta_0)$$

où A est une quantité positive quelconque; on pourra toujours y satisfaire et même pour des valeurs réelles de ξ et η. On voit de suite en effet que l'équation

$$1 - \xi^2 - \eta^2 = A(1 + \eta)^2$$

représente une ellipse réelle, intérieure au cercle de rayon un et tangente à ce cercle au point $(\xi = 0,\ \eta = -1)$. Tout point ξ, η à l'intérieur de cette ellipse satisfait à l'inégalité (β).

Ainsi il existe des valeurs de (ξ, η) satisfaisant aux inégalités (α). Prenons un tel système de valeurs.

Pour réduire la forme Φ, c'est à dire pour que les ε aient leur partie réelle et leur coefficient de i compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, il suffira évidemment d'employer une substitution de la forme

$$(x,\ y,\ z,\ x+my+nz,\ y+qz,\ z)$$

Une substitution convenable de cette nature transforme donc f en une forme réduite; mais cette substitution ne fait pas apparaître de terme en xx_0 et en xy_0: la proposition énoncée est donc établie.

12. Il nous faut maintenant établir que *zéro peut être représenté par toute forme quadratique ternaire indéfinie à indéterminées conjuguées.* Prenons d'abord la forme

$$f = axx_0 + byy_0 + czz_0$$

où nous supposons que a, b, c, ne sont pas de même signe. De plus ces nombres sont deux à deux premiers entre eux et aucun d'eux n'est divisible par un carré. Nous allons avoir peu de chose à changer à la profonde analyse par laquelle GAUSS établit que zéro peut être représenté par une forme ternaire réelle quand $-bc$, $-ca$, $-ab$ sont respectivement résidus quadratiques de a, b, c. (*Disquisitiones arithmeticæ*, paragraphe 294).

Soient H, K, L trois entiers satisfaisant aux congruences:

$$HH_0 \equiv -bc \pmod a,\quad KK_0 \equiv -ac \pmod b,\quad LL_0 \equiv -ab \pmod c;$$

nous avons dit plus haut qu'on pourrait toujours trouver de tels nombres. On déterminera ensuite A, B, C de manière que

$$A \equiv c \pmod b \quad \text{et} \quad \equiv L \pmod c$$
$$B \equiv a \pmod c \quad \text{et} \quad \equiv H \pmod a$$
$$C \equiv b \pmod a \quad \text{et} \quad \equiv K \pmod b.$$

On aura

$$aAA_0 + bBB_0 + cCC_0 \equiv bHH_0 + cb^2 \equiv b(HH_0 + cb) \equiv 0 \pmod a;$$

on prouverait de la même manière que $aAA_0 + bBB_0 + cCC_0$ est divisible par b et c et par suite par abc.

On voit en outre que A est premier avec b et c, B avec a et c, C avec a et b. S'il arrivait que les valeurs de A, B, C eussent un diviseur commun μ (qui peut être un nombre complexe), μ serait nécessairement premier avec a, b, c et par suite avec abc. On divisera A, B, C par μ et on aura trois nouveaux nombres que nous appellerons encore A, B, C et tels que A soit premier avec b et c, B avec a et c, C avec b et c, et de plus

$$aAA_0 + bBB_0 + cCC_0 \equiv 0 \pmod{abc}.$$

Ceci posé, on voit de suite que Aa, Bb, Cc n'ont pas de diviseur commun. On peut alors trouver une substitution de déterminant un

$$(x,\ y,\ z,\ \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,\ \beta x + \beta' y + \beta'' z,\ \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)$$

déterminé par les conditions

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = Aa,\ \ \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = Bb,\ \ \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = Cc$$

et

$$\alpha Aa + \beta Bb + \gamma Cc = 1.$$

La forme proposée f se changera en une forme

$$g = (m,\ m',\ m'',\ n,\ n',\ n'')$$

dans laquelle m', m'' et n seront divisibles par abc. Posons en effet

$$\beta''\gamma - \beta\gamma'' = A',\ \ \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = B',\ \ \alpha''\beta - \alpha\beta'' = C'$$

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma = A'',\ \ \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = B'',\ \ \alpha\beta' - \alpha'\beta = C''$$

on aura

$$\alpha' = B''Cc - C''Bb,\ \ \beta' = C''Aa - A''Cc,\ \ \gamma' = A''Bb - B''Aa$$

$$\alpha'' = C'Bb - B'Cc,\ \ \beta'' = A'Cc - C'Aa,\ \ \gamma'' = B'Aa - A'Bb$$

et en substituant ces valeurs dans les expressions de m', m'' et n

$$m' = a\alpha'\alpha'_0 + b\beta'\beta'_0 + c\gamma'\gamma'_0,\quad m'' = a\alpha\alpha''_0 + \ldots,\quad n = a\alpha'\alpha''_0 + \ldots;$$

on trouve, par exemple pour m'

$$m' \equiv A''A''_0 bc(bBB_0 + cCC_0) \equiv 0 \pmod a$$

$$m' \equiv B''B''_0 ac(aAA_0 + cCC_0) \equiv 0 \pmod b$$

$$m' \equiv C''C''_0 ab(aAA_0 + bBB_0) \equiv 0 \pmod c$$

par suite m' est divisible par abc et de même pour m'' et n.

Effectuons maintenant sur f la substitution

$$(x,\ y,\ z,\ \alpha dx + \alpha' y + \alpha'' z,\ \beta dx + \beta' y + \beta'' z,\ \gamma dx + \gamma' y + \gamma'' z)$$

en posant $abc = d$.

f se changera manifestement en

$$g' = (md^2,\ m',\ m'',\ n,\ n'd,\ n''d)$$

et le déterminant de cette forme sera d^3. Or considérons la forme

$$g'' = \left(md,\ \frac{m'}{d},\ \frac{m''}{d},\ \frac{n}{d},\ n',\ n''\right)$$

ces coefficients seront entiers et son déterminant est égal à l'unité. Or admettons pour un instant que toute forme ternaire indéfinie de déterminant un est équivalente à la forme

$$-xx_0 + yz_0 + y_0 z$$

en employant une substitution à coefficients entiers de déterminant ± 1 ou $\pm i$. Il en résulte que, à l'aide d'une telle substitution, on peut transformer g' en la forme

$$G = -dxx_0 + dyz_0 + dy_0 z$$

ou bien encore on peut passer de la forme f à la forme G en employant une substitution à coefficients entiers dont la norme est égale à d^2. Si

$$(x,\ y,\ z,\ \lambda x + \mu y + \nu z,\ \lambda' x + \mu' y + \nu' z,\ \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)$$

est cette substitution, on voit que

$$x = \mu,\quad y = \mu',\quad z = \mu''$$

est une solution de l'équation

$$axx_0 + byy_0 + czz_0 = 0.$$

C. q. f. d.

μ, μ' et μ'' ne sont pas tous trois nuls, puisque la norme du déterminant est égale à d^2.

Nous avons admis que toute forme ternaire indéfinie de déterminant un était équivalente à la forme

$$-xx_0 + yz_0 + y_0 z$$

en employant une substitution dont le déterminant a sa norme égale à l'unité. C'est ce que l'on peut établir comme il suit:

Soit

$$f = (a,\ a',\ a'',\ b,\ b',\ b'')$$

une forme indéfinie de déterminant un.

Considérons la forme binaire obtenue en faisant $z = 0$ dans f, c'est à dire

$$axx_0 + a'yy_0 + b''xy_0 + b''_0 x_0 y;$$

on sait que l'on peut réduire cette forme de telle manière que la valeur absolue de a soit moindre que $\sqrt{2|b''b''_0 - aa'|}$, (1) la quantité sous le radical étant prise en valeur absolue. Supposons cette réduction faite: si on fait sur y et z une substitution convenable de norme égale à un, la théorie des formes binaires montre encore qu'on peut arriver à avoir

$$|b''b''_0 - aa'| < \sqrt{2|a|};$$

on a donc simultanément

$$a^2 \leqq 2|b''b''_0 - aa'|, \qquad |b''b''_0 - aa'| \leqq \sqrt{2|a|}.$$

---

(1) Voir mon *Mémoire sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées* (Annales de l'École Normale Supérieure, Janvier et Février 1884).

On conclut de là que les valeurs absolues de a et $b''b''_0 - aa'$ sont égales à zéro ou à l'unité; elles doivent être nulles simultanément ou toutes deux différentes de zéro.

1°. Soit d'abord

$$|a| = 1 \qquad |b''b''_0 - aa'| = 1\,.$$

En employant une substitution de la forme

$$(x,\ y,\ z,\ x + \beta y + \gamma z,\ y + \gamma' z,\ z)$$

on ne change pas a et $b''b''_0 - aa'$ et un calcul facile montre que l'on peut choisir β, γ et γ' de façon que dans

$$b'', \quad ab_0 - b''b' \quad \text{et} \quad a'b' - b''_0 b_0$$

la partie réelle et le coefficient de i soient moindres en valeur absolue que

$$\frac{1}{2}|a|, \quad \frac{1}{2}|b''b''_0 - aa'|, \quad \frac{1}{2}|b''b''_0 - aa'|$$

respectivement. On en conclut

$$b'' = 0, \quad b_0 = 0, \quad b' = 0;$$

on a donc les formes dans lesquelles

$$|a| = 1, \quad |a'| = 1, \quad |a''| = 1$$

en prenant seulement les signes de manière que $D = 1$ et que la forme soit indéfinie. Elles sont équivalentes à la forme

$$xx_0 - yy_0 - zz_0$$

et cette dernière, comme on le voit de suite, est équivalente à

$$-xx_0 + yz_0 + y_0 z.$$

2°. Soit maintenant

$$|a| = 0, \quad |b''b''_0 - aa'| = 0 \quad \text{ou} \quad a = b'' = 0.$$

On aura alors

$$1 = -a'b'b'_0$$

donc

$$a' = -1 \quad \text{et} \quad b' = \pm 1, \ \pm i.$$

Si nous faisons maintenant la substitution:

$$(x, \ y, \ z; \ x + \beta y + \gamma z, \ y, \ z)$$

on ne change pas a, a', b' et b''. On peut choisir β et γ de manière que b soit nul après la transformation et que la norme de a'' soit zéro ou l'unité. On obtient ainsi des formes toutes équivalentes à

$$f = -yy_0 + \varepsilon zz_0 + xz_0 + x_0 z \quad \text{où} \quad \varepsilon = 0, \ +1, \ -1,$$

et on voit enfin sans peine que celle-ci est équivalente à

$$-xx_0 + yz_0 + y_0 z.$$

C. q. f. d.

III.

13. Revenons maintenant à la question de la réduction continuelle de la forme Φ. Pour bien fixer les idées, nous admettons que la forme indéfinie

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0$$

où comme précédemment

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$v = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$

$$w = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

dont nous partons, est une forme réduite. La forme définie Φ

$$\Phi = (1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) F + 2 \,\text{Norme}\,(u\xi + v\eta + w)$$

sera donc réduite pour certaines valeurs de ξ, η situées dans le domaine S et formant elles-mêmes un domaine que nous avons appelé D (paragraphe 8). Lorsque le point (ξ, η) sort du domaine D, il faut suivant les circonstances de la variation de ce point employer certaines substitutions pour réduire la forme de nouveau, ce qui donne, en employant la totalité des substitutions propres à réduire de nouveau Φ, certaines réduites adjacentes à la réduite F, auxquelles correspondent des domaines D', D'', ... On continue ainsi à effectuer la réduction continuelle de la forme Φ jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de nouvelles réduites, ce qui arrivera nécessairement puisque le nombre des réduites est limité. Désignons par δ le domaine total formé par les domaines D, D', D'', ... Lorsque le point (ξ, η) sort du domaine δ on retombe sur une réduite déjà obtenue, à laquelle se trouve ainsi correspondre un nouveau domaine D_1. Soit encore, pour ne pas multiplier les notations

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0$$

cette réduite. En faisant passer (ξ, η) du domaine D dans le domaine D_1 on est alors conduit à une substitution S à coefficients entiers et de déterminant un transformant F en elle-même. À une telle substitution correspond manifestement une substitution linéaire faite sur u, v, w soit

$$(u,\ v,\ w,\ Au + Bv + Cw,\ A'u + B'v + C'w,\ A''u + B''v + C''w)$$

et cette substitution transforme en elle-même l'expression $uu_0 + vv_0 - ww_0$. Quand on effectue sur x, y, z la substitution (S) la forme Φ devient:

$$(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)F$$
$$+ 2\,\text{Norme}\,[(Au + Bv + Cw)\xi + (A'u + B'v + C'w)\eta + A''u + B''v + C''w]$$

où en divisant par $\text{Norme}(C\xi + C'\eta + C'')$, ce qui ne modifie en rien les conditions relatives à la réduction, et posant:

$$(1) \qquad \xi' = \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \eta' = \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''},$$

cette forme peut s'écrire:

$$(1 - \xi'\xi'_0 - \eta'\eta'_0)F + 2\,\text{Norme}\,(u\xi' + v\eta' + w).$$

On en conclut que l'on passe du domaine D au domaine D_1 en effectuant sur (ξ, η) la substitution (1).

En continuant d'effectuer la réduction continuelle de la forme Φ, on obtiendra un *groupe* G d'une infinité de substitutions telles que (1); ce groupe sera *discontinu*, car à un système de valeurs de (ξ, η) ne correspond qu'un nombre limité de réduites arithmétiquement équivalentes à la forme définie Φ, le point (ξ, η) ne peut donc appartenir qu'à un nombre limité de domaines D.

Le domaine δ est un domaine *fondamental* de ce groupe, c'est à dire qu'à tout point (ξ, η) à l'intérieur de S correspond par une substitution du groupe un nombre limité de points à l'intérieur de δ (il y en a au moins un); c'est ce qui résulte immédiatement de ce que δ est l'ensemble des domaines D correspondant à *toutes* les réduites distinctes arithmétiquement équivalentes à F.

Le domaine δ a un nombre limité de points communs avec la surface de S, et il en a toujours un, puisque nous avons montré précédemment qu'il existait toujours au moins une réduite dans laquelle les coefficients de xx_0 et xy_0 étaient égaux à zéro.

14. Avant de continuer l'étude générale de ces groupes, examinons un cas particulier. Je prendrai:

$$F = yy_0 + xz_0 + x_0z.$$

Nous écrirons:

$$F = uu_0 + vv_0 - ww_0$$

en posant:

$$u = y, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z), \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z).$$

On aura ici:

$$\Phi = (yy_0 + xz_0 + x_0z)(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) + 2\,\text{Norme}\left(\frac{\eta + 1}{\sqrt{2}}x + \xi y + \frac{\eta - 1}{\sqrt{2}}z\right).$$

Avant d'aller plus loin, ouvrons une parenthèse pour chercher les formes réduites de déterminant -1, dans lesquelles $a = b'' = 0$; nous éviterons ainsi plus tard une discussion un peu longue. Soit

$$yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z$$

une telle forme; le déterminant étant égal à -1, on aura $b'b'_0 = 1$.

En supposant, comme au paragraphe 10, que

$$\delta = a'' - bb_0 > 0$$

nous avons vu (voir ce paragraphe) qu'on on doit déterminer ξ et η de telle manière que dans $b'\frac{\xi_0}{\eta_0 + 1}$ le coefficient de i et la partie réelle soient moindres en valeur absolue que $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, par suite moindres que $\frac{1}{2}$. D'autre part dans

$$b - b'_0\frac{\xi}{\eta + 1}$$

la partie réelle et le coefficient de i sont moindres que $\frac{1}{2}$, et on voit qu'il ne peut en être ainsi que si $b = 0$.

Reportons-nous maintenant à l'égalité qui limite δ (à la fin du paragraphe 7), elle devient ici

$$\frac{1}{2\delta} + \frac{\sqrt{2}}{\delta} > 1$$

par suite $\delta = 0$ ou 1; on a donc $a'' = 0, 1$.

Nous avons supposé $\delta > 0$; *dans tous les cas on arrive à la conclusion suivante. On doit avoir* $b = 0$ *et* $a'' = 0, \pm 1$.

Revenons maintenant à la forme Φ; en la mettant sous la forme canonique

$$\mu_1 \operatorname{Norme}(x + \varepsilon y + \varepsilon' z) + \mu_2 \operatorname{Norme}(y + \varepsilon'' z) + \mu_3 zz_0,$$

on a

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2}\frac{\xi_0}{\eta_0 + 1}$$

$$\varepsilon'_0 = -\frac{\xi\xi_0}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)} + \frac{\eta_0 - \eta}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)}$$

$$\varepsilon''_0 = -\sqrt{2}\frac{\xi}{1 + \eta};$$

les parties réelles et les coefficients de i dans ces trois expressions doivent être compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, pour que la forme Φ soit réduite.

Calculons enfin μ_1, μ_2 et μ_3:

On aura

$$\mu_1 = (\eta + 1)(\eta_0 + 1)$$

$$\mu_2 = 1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0$$

$$\mu_3 = \frac{(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0)^2}{(1 + \eta)(1 + \eta_0)}$$

et on voit que les deux inégalités $\mu_2 > \frac{1}{2}\mu_1$ et $\mu_3 > \frac{1}{2}\mu_2$ coïncident et se réduisent à l'inégalité unique:

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 + \eta_0).$$

Soit D le domaine correspondant à la réduite F.

Laissons toujours le point (ξ, η) à l'intérieur du domaine

$$1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0 > \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 + \eta_0)$$

et faisons varier (ξ, η), en le faisant sortir de D successivement par les autres faces. Posons

$$\frac{\xi}{\eta + 1} = u, \quad \frac{1}{\eta + 1} = v.$$

On a

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2}\cdot u_0, \quad \varepsilon_0' = -uu_0 + v - v_0, \quad \varepsilon_0'' = -\sqrt{2}\cdot u.$$

Supposons que ξ, η varie de telle manière que dans v, le coefficient de i dépasse $\frac{1}{4}$, alors dans ε_0' le coefficient de i deviendra supérieur à $\frac{1}{2}$, et on réduira la forme de nouveau, en employant la substitution

$$(x, y, z, x + iz, y, z)$$

mais cette substitution transforme la forme F en elle-même; on rencontre donc ainsi une substitution fondamentale du groupe G; cette substitution est:

$$\left[\xi,\ \eta,\ \frac{\xi}{\frac{i}{2}(\eta+1)+1},\ \frac{\eta\left(1-\frac{i}{2}\right)-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}(\eta+1)+1}\right]$$

et elle laisse invariable le point

$$\xi = 0, \quad \eta = -1;$$

soient maintenant (ξ, η) variant de telle manière que dans u le terme réel dépasse $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, la substitution à employer pour réduire de nouveau F sera:

$$(x,\ y,\ z,\ x-y,\ y+z,\ z)$$

ce qui donnera la réduite

$$(2) \qquad yy_0 + zz_0 + xz_0 + x_0z.$$

Si on sort de D de telle manière que dans u le terme réel soit moindre que $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, il faut employer la substitution:

$$(x,\ y,\ z,\ x+y,\ y-z,\ z)$$

et on retombe sur la réduite

$$yy_0 + zz_0 + xz_0 + x_0z.$$

Sort-on de D, de façon que dans u le coefficient de i soit moindre que $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, il faudra considérer la substitution

$$(x,\ y,\ z,\ x+iy,\ y+iz,\ z)$$

ce qui donne encore

$$yy_0 + zz_0 + xz_0 + x_0z.$$

Quand on sort de D de telle manière que dans u le terme réel dépasse $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, après la substitution indiquée précédemment, la forme Φ a changé, et les ε nouveaux sont alors

$$\varepsilon = \sqrt{2} \cdot u - 1$$

$$\varepsilon' = -uu_0 + v_0 - v + \sqrt{2} \cdot u$$

$$\varepsilon'' = -\sqrt{2} \cdot u_0 + 1 .$$

On aura un nouveau domaine D'; on cherchera comme pour le domaine D les différentes réduites contigues que l'on obtient en sortant de D' par les différentes *faces* qui forment *l'angle polyèdre* ayant pour sommet $\xi = 0$, $\eta = -1$. La seule réduite contigue différente des deux réduites déjà trouvées est

$$yy_0 - zz_0 + xz_0 + x_0 z. \tag{3}$$

Cela résulte d'ailleurs à priori de la remarque faite plus haut; j'ajoute que je ne considère pas comme différentes deux réduites pour lesquelles les coefficients de xz_0 sont égaux et de signe contraire. On obtiendra la réduite (3) en sortant de D', de telle manière que dans $-uu_0 + \sqrt{2} \cdot u$ la partie réelle dépasse $\frac{1}{2}$; il faut alors faire la substitution

$$(x,\ y,\ z,\ x - z,\ y,\ z)$$

ce qui donne bien la réduite (3).

En sortant de l'angle polyèdre formé par les trois domaines D, D', D'', on retombe sur les réduites déjà obtenues, et on est aussi conduit à certaines substitutions transformant en elles-mêmes la forme initiale

$$yy_0 + xz_0 + x_0 z;$$

ces substitutions sont de la forme:

$$(x,\ y,\ z,\ x + my + nz,\ y + qz,\ z).$$

Etudions directement ces substitutions; on aura les relations:

$$qq_0 + n + n_0 = 0$$

$$m = -q_0 .$$

On a donc les substitutions

$$\left[x,\ y,\ z,\ x+my-\left(\frac{mm_0}{2}+pi\right)z,\ y-m_0z,\ z\right]$$

m étant un entier complexe arbitraire dont la norme est paire, et p un entier réel. Toutes ces substitutions peuvent s'obtenir en composant les trois suivantes:

$$(x,\ y,\ z,\ x+2y-2z,\ y-2z,\ z)$$
$$(x,\ y,\ z,\ x+(1+i)y-z,\ y-(1-i)z,\ z)$$
$$(x,\ y,\ z,\ x+iz,\ y,\ z).$$

Multiplions en effet la puissance α de la première de ces substitutions par la puissance β de la seconde, et ce produit par la puissance γ de la troisième, on aura une substitution nécessairement de la forme

$$\left[x,\ y,\ z,\ x+My-\left(\frac{MM_0}{2}+Pi\right)z,\ y-M_0z,\ z\right].$$

On calcule facilement M_0

$$M_0=\alpha+2\beta-\alpha i.$$

Supposons inversement que M soit donné ainsi que l'entier réel P, M étant d'ailleurs tel que MM_0 soit pair. Soit

$$M=\mu+\nu i$$

on aura:

$$\alpha+2\beta=\mu,\quad \alpha=\nu$$

égalités qui donnent pour α et β des nombres entiers, car $\mu-\nu$ est nécessairement pair. On déterminera ensuite γ de manière que le coefficient de z dans la transformée de x soit $-\frac{MM_0}{2}-Pi$, ce qui pourra toujours se faire.

A chacune des substitutions précédentes transformant en elle-même

$$yy_0+xz_0+x_0z$$

correspond une substitution pour le groupe G (paragraphe 13). Les trois substitutions ainsi obtenues laissent invariable le point $\xi = 0$, $\eta = -1$.

Posons, comme plus haut,

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1}, \quad v = \frac{1}{\eta + 1},$$

ces trois substitutions donnent pour u et v les substitutions suivantes

$$\left(u, \ v, \ u + \sqrt{2}, \ v + u\sqrt{2} + 1\right)$$

$$\left(u, \ v, \ u + \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \ v + u\frac{1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(u, \ v, \ u, \ v - \frac{i}{2}\right).$$

15. Les résultats précédents relatifs à une forme particulière, nous conduisent de suite au cas général. Soit

$$F = a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z$$

une réduite dans laquelle $a = b'' = 0$ et à laquelle correspondent par suite, comme nous l'avons vu précédemment, des domaines ayant un point commun avec la limite de S.

Considérons le groupe des substitutions à coefficients entiers de la forme:

$$(1) \qquad (x, \ y, \ z, \ x + my + nz, \ y + qz, \ z)$$

où m, n et q sont entiers, transformant F en elle-même. On aura les deux relations

$$a'qq_0 + bq + b_0q_0 + b'_0n_0 + b'n = 0$$

$$a'q_0 + mb' = 0.$$

Les substitutions fondamentales seront, comme précédemment, au nombre de trois. Nous n'établirons pas ce point; et, en nous bornant à ce qui nous sera utile dans la suite, nous allons simplement montrer qu'il existe dans le groupe trois substitutions de la forme

$$(x,\ y,\ z,\ x + \alpha z,\ y,\ z)$$

(2) $$(x,\ y,\ z,\ x + \mu y + \nu z,\ y + \lambda z,\ z)$$

$$(x,\ y,\ z,\ x + \mu' y + \nu' z,\ y + \lambda' y,\ z)$$

le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ étant imaginaire.

Nous aurons la première substitution, en prenant $\alpha = ib'_0$.

Pour la seconde, nous prendrons

$$\mu = ta', \quad \lambda_0 = - tb'$$

t étant seulement tel que l'équation

$$a'b'b'_0 tt_0 - bt_0 b'_0 - b_0 tb' + b'\nu + b'_0 \nu_0 = 0$$

puisse être résolue par rapport à ν. Or soit

$$\nu = x + iy, \quad b' = A + iB$$

l'équation s'écrira

$$2Ax - 2By = - a'b'b'_0 tt_0 + bb'_0 t_0 + b_0 b't.$$

Il suffira de prendre pour t le plus grand commun diviseur entre $2A$ et $2B$. En prenant ensuite

$$\mu' = ta'i, \quad \lambda'_0 = - tb'i$$

on aura la troisième des substitutions (2), le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ qui se réduit à $-i$ est bien imaginaire.

A toute substitution (1) correspond une substitution du groupe G, relatif aux variables ξ et η. Il en résulte pour les deux variables

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1}, \quad v = \frac{1}{\eta + 1}$$

déjà considérées précédemment, la substitution

$$\left[u,\ v,\ u + \frac{mb'}{\sqrt{\delta}},\ v - \frac{a'q}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(mb_0 - na')\right]$$

et par suite aux trois substitutions (2) correspondent les substitutions

$$\left| u, \quad v, \quad u, \quad v - \frac{\alpha a' b'}{\delta} \right|$$

$$\left| u, \quad v, \quad u + \frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}}, \quad v - \frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(\mu b_0 - \nu a') \right|$$

$$\left[u, \quad v, \quad u + \frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}}, \quad v - \frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(\mu' b_0 - \nu' a') \right].$$

Remarquons que, α étant égal à ib'_0, l'expression $\frac{\alpha a' b'}{\delta}$ est purement imaginaire.

16. Avant d'aller plus loin, résumons les propriétés fondamentales du groupe G du paragraphe 13. Tout d'abord une substitution quelconque de ce groupe peut être obtenue en composant convenablement un nombre fini de substitutions, que nous appelons les substitutions fondamentales du groupe. Nous avons montré aussi qu'on pouvait trouver un domaine δ jouissant de la propriété suivante: à tout point (ξ, η) à l'intérieur de S correspond par une substitution du groupe un nombre limité de points à l'intérieur de δ, et il y en a au moins un. S'il y a plus d'un point, on pourra évidemment diviser ce domaine en plusieurs autres tels que dans chacun d'eux il y aura un point et un seul correspondant par une substitution du groupe à un point quelconque de S: nous appellerons dans la suite un tel domaine, *un domaine fondamental,* et le désignerons par R.

Le domaine fondamental R a *un* ou *un nombre limité* de points communs avec la surface de S. Soit A un pareil point; nous avons signalé trois substitutions distinctes laissant le point A invariable.

Faisons encore quelques remarques sur ce groupe G, dont nous représentons, comme précédemment, une substitution quelconque par

$$\left(\xi, \quad \eta, \quad \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right).$$

Parmi les points du domaine S, nous avons à remarquer particulièrement ceux que laisse invariables une substitution du groupe. Pour une substitution donnée (A, B, C), nous avons les équations

$$\xi = \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \eta = \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}.$$

En introduisant une troisième inconnue k, ces équations peuvent s'écrire

$$(1) \quad \begin{aligned} (A - k)\xi + \quad A'\eta \quad + \quad A'' \quad &= 0 \\ B\xi \quad + (B' - k)\eta + \quad B'' \quad &= 0 \\ C\xi \quad + \quad C'\eta \quad + C'' - k &= 0; \end{aligned}$$

k sera donc déterminée par l'équation du troisième degré:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A - k & A' & A'' \\ B & B' - k & B'' \\ C & C' & C'' - k \end{vmatrix} = 0.$$

Si, comme on peut le supposer, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C & C'' \end{vmatrix} = 1;$$

comme d'autre part la substitution laisse invariable l'hypersphère de rayon un, on aura (Acta Mathematica, T. 1, pag. 317)

$$\begin{aligned} AA_0 + A'A'_0 - A''A''_0 &= 1 \\ BB_0 + B'B'_0 - B''B''_0 &= 1 \\ CC_0 + C'C'_0 - C''C''_0 &= -1 \\ AB_0 + A'B'_0 - A''B''_0 &= 0 \\ CB_0 + C'B'_0 - C''B''_0 &= 0 \\ AC_0 + A'C'_0 - A''C''_0 &= 0. \end{aligned}$$

Par suite les équations (1) peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} (-1 + kA_0)\xi + \quad kB_0\eta \quad + \quad kC_0 \quad & \quad 0 \\ kA'_0\xi \quad + (kB'_0 - 1)\eta + \quad kC'_0 \quad &= 0 \\ kA''_0\xi \quad + \quad kB''_0\eta \quad + (kC''_0 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

et l'équation (2) est identique à la suivante:

$$(2') \qquad \begin{vmatrix} kA_0 - 1 & kB_0 & kC_0 \\ kA'_0 & kB'_0 - 1 & kC'_0 \\ kA''_0 & kB''_0 & kC''_0 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or on passe de l'équation (2) à l'équation (2'), en remplaçant les coefficients par leur conjugué et en changeant k en $\frac{1}{k}$; on en conclut que si l, m et n désignent les trois racines de l'équation (1), les quantités

$$\frac{1}{l_0}, \quad \frac{1}{m_0}, \quad \frac{1}{n_0}$$

sont aussi racines de cette même équation; donc ces trois quantités doivent, dans un ordre convenable, représenter l, m et n.

Deux cas peuvent se présenter: ou chaque racine est égale à l'inverse de sa conjuguée, et par suite les trois racines ont un module égal à l'unité, ou bien l'on a

$$l = \frac{1}{l_0} \quad \text{mais} \quad \frac{1}{m_0} = n, \quad \frac{1}{n_0} = m.$$

Dans les deux cas l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$k^3 + Mk^2 - M_0 k - 1 = 0$$

où

$$M = -(A + B' + C'').$$

A chaque racine de cette équation en k, correspond par les équations (1) un système de valeurs de (ξ, η). Le seul cas intéressant pour nous est celui où le point correspondant est à l'intérieur de l'hypersphère de rayon un. Je me bornerai à énoncer ici les résultats auxquels on arrive dans le cas *général*.

Dans le premier cas, c'est à dire quand les trois racines de l'équation en k ont un module égal à l'unité, un des points est à *l'intérieur* de l'hypersphère et les deux autres sont à *l'extérieur;* nous pouvons dire que dans ce cas *la substitution est elliptique*.

Dans le second cas, où il n'y a qu'une racine de module égal à un, deux des points sont situés *sur* l'hypersphère, et le troisième est à *l'extérieur;* la substitution sera dite alors *hyperbolique*.

17. Nous allons seulement examiner avec détails un cas particulier fort important pour la suite. Pour une valeur de k, racine de l'équation (2), il arrivera en général que les trois équations (1) se réduiront à deux, mais il peut arriver, dans certains cas particuliers, que les équations se réduisent à une seule; il y aura alors une infinité de points (ξ, η) restant invariables par la substitution (A, B, C); ils satisfont à une équation du premier degré entre ξ et η.

Si nous revenons maintenant au domaine fondamental R (paragraphe 16), les points (ξ, η) que nous venons de considérer ne pourront être que des *sommets* ou des *arêtes* de ce domaine. En particulier, d'un sommet A situé sur la surface de S pourront partir des arêtes dont tous les points resteront invariables pour une même substitution.

Soit, comme précédemment,

$$a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'xz_0 + b'_0x_0z$$

la réduite qui nous a conduit au sommet A. Toute substitution semblable de cette réduite, conduisant à une substitution de G qui laisse invariable le point A sera de la forme

$$(x,\ y,\ z,\ \alpha x + \beta y + \gamma z,\ \beta' y + \gamma' z,\ \gamma'' z)$$

et les trois entiers α, β' et γ'' seront nécessairement égaux à ± 1 ou $\pm i$ et leur produit sera l'unité. A cette substitution correspondra pour G, une substitution de la forme

$$(u,\ v,\ Au + B,\ Cv + Du + E)$$

en posant, comme plus haut,

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\eta + 1}.$$

Les deux équations

$$u = Au + B, \quad v = Cv + Du + E$$

auront une infinité de solutions si $C = 1$ et si les valeurs de u données par les deux égalités

$$u = Au + B, \quad Du + E = 0$$

coïncident. Par conséquent une arête, de la nature considérée, partant du sommet A, correspond a une valeur déterminée de u, v étant arbitraire.

IV.

18. Nous pouvons maintenant aborder l'étude des fonctions de deux variables ξ et η, qui restent invariables par les substitutions du groupe G. Désignons, comme précédemment, par

$$\left(\xi, \quad \eta, \quad \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right)$$

une substitution quelconque du groupe, et nous pouvons supposer que

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 1.$$

Il existe des fonctions de deux variables indépendantes ξ et η, qui ne changent pas quand on effectue sur les variables une substitution quelconque du groupe G. J'ai démontré ce théorème dans un mémoire précédent (Acta mathematica, T. 1); je ne reviendrai pas sur la démonstration. Nous avons considéré la série suivante

$$(1) \qquad \sum R\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) \times \frac{1}{(C\xi + C'\eta + C'')^{3m}}$$

qui est étendue à toutes les substitutions du groupe; m est un entier supérieur à l'unité, et $R(\xi, \eta)$ est une fraction rationnelle de ξ et η qui reste holomorphe à l'intérieur du domaine S et sur la surface de ce domaine. Dans ces conditions on verra dans le mémoire cité que la série est convergente. Je m'arrêterai seulement ici pour montrer de nouveau que la série (1) ne sera pas identiquement nulle, quelle que soit la fraction rationnelle R, au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de l'entier m. Considérons le point $\xi = 0$, $\eta = 0$. Supposons d'abord que toute substitution du groupe, autre que la substitution unité, donne comme transformé de 0 un point qui en soit différent. On pourra alors

trouver autour de o un domaine σ, suffisamment petit pour qu'à tout point (ξ, η) de ce domaine ne correspondent par les substitutions du groupe que des points (ξ', η'), pour lesquels on aura:

$$\xi'\xi'_0 + \eta'\eta'_0 > \xi\xi_0 + \eta\eta_0. \tag{2}$$

Dans ces conditions, si

$$\xi' = \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \quad \eta' = \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}$$

on aura

$$\operatorname{Mod}(C\xi + C'\eta + C'') > 1;$$

c'est ce qui résulte de la relation

$$1 - \xi'\xi'_0 - \eta'\eta'_0 = \frac{1}{\operatorname{Mod}^2(C\xi + C'\eta + C'')}(1 - \xi\xi_0 - \eta\eta_0) \tag{3}$$

rapprochée de l'inégalité (2). Revenons maintenant à la série (1), que l'on peut écrire

$$R(\xi, \eta) + \sum R(\xi', \eta')\frac{1}{(C\xi + C'\eta + C'')^{3m}},$$

où la sommation s'étend à toutes les substitutions du groupe, sauf la substitution unité. On voit alors que si m est suffisamment grand, l'expression précédente différera peu de $R(\xi, \eta)$, on peut donc faire en sorte qu'elle ne soit pas nulle.

La même démonstration est applicable dans le cas où il y aurait un nombre N de substitutions changeant le point $\xi = 0$, $\eta = 0$ en lui-même; on écrira l'expression en prenant d'abord les termes correspondant aux N substitutions précédentes, soit

$$\sum{}' R(\xi', \eta')\frac{1}{(C\xi + C'\eta + C'')^{3m}}$$

cette somme; d'après l'égalité (3) $\operatorname{mod} C'' = 1$, et pour $\xi = 0$, $\eta = 0$ cette somme se réduit à

$$R(0, 0)\sum{}' \frac{1}{C''^{3m}}$$

et, comme m et $R(0, 0)$ sont arbitraires, cette somme ne sera pas nulle.

Désignons par $\theta(\xi, \eta)$ la fonction des deux variables ξ et η, dont l'existence se trouve maintenant complètement établie; il est aisé de montrer que ce sont des fonctions analytiques holomorphes de ξ et η, pour tout point du domaine S, c'est un point très simple auquel je ne m'arrête pas. On a enfin

$$\theta\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) = (C\xi + C'\eta + C'')^{3m}\theta(\xi, \eta)$$

la substitution (A, B, C) étant une substitution quelconque du groupe.

19. Je dis maintenant que, si m est suffisamment grand, on peut trouver deux fonctions θ, qui ne soient pas dans un rapport constant.

Soient θ_1 et θ_2 deux fonctions, correspondant aux fractions rationnelles R_1 et R_2; formons l'expression

$$\theta_1(\xi, \eta)\theta_2(\xi', \eta') - \theta_1(\xi', \eta')\theta_2(\xi, \eta)$$

(ξ, η) et (ξ', η') étant deux points arbitraires.

En nous supposant dans le cas général où nous nous sommes placé d'abord au paragraphe précédent, considérons le domaine σ autour du point o. Les points (ξ, η) et (ξ', η') étant dans ce domaine, l'expression précédente diffère peu de

$$R_1(\xi, \eta)R_2(\xi', \eta') - R_1(\xi', \eta')R_2(\xi, \eta)$$

si m est suffisamment grand; elle n'est donc pas identiquement nulle, si les fonctions R_1 et R_2 sont arbitraires, comme nous le supposons; par suite le quotient $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ ne se réduit pas à un facteur constant.

Ce résultat si simple est extrêmement important, car de cette manière se trouve établie en toute rigueur l'existence d'une fonction qui ne change pas, quand on fait sur les variables une substitution quelconque du groupe G. Si on pose en effet:

$$F(\xi, \eta) = \frac{\theta_1(\xi, \eta)}{\theta_2(\xi, \eta)}$$

la fonction F satisfera aux relations

$$F\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) = F(\xi, \eta).$$

Nous donnerons à la fonction F le nom de fonction hyperfuchsienne.

On peut obtenir évidemment une infinité de fonctions hyperfuchsiennes; des considérations toujours analogues, où l'on se sert d'un nombre m suffisamment grand, montrent que, les fractions rationnelles dont on dispose étant prises arbitrairement, toutes ces fonctions ne sont pas fonctions de l'une d'entre elles.

20. La fonction $\theta(\xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de ξ et η dans le domaine S défini par l'inégalité

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

Considérons un domaine fondamental (R) (paragraphe 16); et soit A un point commun à R et à la surface de S. Nous nous proposons maintenant de rechercher la valeur de la fonction θ au point A.

Pour employer les mêmes notations qu'au paragraphe 15, nous pouvons admettre que le point A est le point $\xi = 0$, $\eta = -1$. Soit une substitution quelconque du groupe G

$$f_i(\xi, \eta) = \frac{A_i\xi + A'_i\eta + A''_i}{C_i\xi + C'_i\eta + C''_i}, \quad F_i(\xi, \eta) = \frac{B_i\xi + B'_i\eta + B''_i}{C_i\xi + C'_i\eta + C''_i}.$$

Si nous posons, comme plus haut,

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1}, \quad v = \frac{1}{\eta + 1}$$

au groupe G relatif à ξ et η, correspondra un groupe G_1 relatif à u et v, et posons:

$$\varphi_i(u, v) = \frac{f_i}{F_i + 1}, \quad \Phi_i(u, v) = \frac{1}{F_i + 1}.$$

Considérons la fonction θ définie, comme on se rappelle, par la série

$$\theta(\xi, \eta) = \sum R(f_i, F_i)\left[\frac{D(f_i, F_i)}{D(\xi, \eta)}\right]^m$$

où la notation $\frac{D(f_i, F_i)}{D(\xi, \eta)}$ désigne, suivant l'usage, le déterminant fonctionnel de f_i et F_i par rapport à ξ et η. Or on a

$$\frac{D(f_i, F_i)}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(f_i, F_i)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(f_i, F_i)}{D(\varphi_i, \Phi_i)} \cdot \frac{D(\varphi_i, \Phi_i)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)}$$

et par suite

$$\frac{D(f_i, F_i)}{D(\xi, \eta)} = v^3 \frac{1}{\Phi_i^3} \cdot \frac{D(\varphi_i, \Phi_i)}{D(u, v)}$$

et l'on peut écrire:

$$\theta(\xi, \eta) = v^{3m} \cdot \sum R(f_i, F_i) \frac{1}{\Phi_i^{3m}} \cdot \left[\frac{D(\varphi_i, \Phi_i)}{D(u, v)}\right]^m.$$

Nous poserons maintenant

$$\theta(\xi, \eta) = v^{3m} \theta_1(u, v);$$

d'après sa forme même la fonction $\theta_1(u, v)$ est analogue à $\theta(\xi, \eta)$ c'est à dire qu'elle se reproduit, multiplié par $\left[\frac{D(\varphi_i, \Phi_i)}{D(u, v)}\right]^m$ quand on remplace u et v respectivement par $\varphi_i(u, v)$ et $\Phi_i(u, v)$.

D'ailleurs puisque

$$\theta_1(u, v) = \sum R(f_i, F_i) \frac{1}{(C_i\xi + C'_i\eta + C''_i)^{3m}} \cdot \frac{1}{v^{3m}}$$

on voit que θ_1 tend vers zéro, quand ξ et η tendent respectivement vers 0 et -1, car la série est convergente et chacun de ses termes tend vers zéro. Etudions plus complètement cette fonction $\theta_1(u, v)$; tout d'abord elle est définie seulement pour les valeurs de u et v qui correspondent au domaine S, ce qui donne ici, en posant $u = u' + iu''$, $v = v' + iv''$

$$2v' > 1 + u'^2 + u''^2.$$

Parmi les substitutions du groupe G_1 nous en avons (paragraphe 15) signalé trois particulièrement intéressantes; ce sont

$$\left[u,\ v,\ u,\ v - \frac{aa'b'}{\delta}\right]$$

$$\left[u,\ v,\ u + \frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\ v - \frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(\mu b_0 - \nu a')\right]$$

$$\left[u,\ v,\ u + \frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\ v - \frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(\mu' b_0 - \nu' a')\right].$$

Je rappelle que $\frac{aa'b'}{\delta}$ est purement imaginaire, et que les deux entiers μ et μ' ne sont pas dans un rapport réel. Si on désigne par

$$(u,\ v,\ u + M,\ v + Nu + P)$$

une quelconque de ces substitutions, il résulte de ce qui a été dit sur la fonction θ_1 que

$$(1) \qquad \theta_1(u + M,\ v + Nu + P) = \theta_1(u,\ v).$$

De cette propriété nous allons immédiatement déduire un développement de θ_1. Pour une valeur fixe donnée à u, θ_1 est une fonction de v, uniforme et continue pour toute valeur telle que

$$2v' > 1 + u'^2 + u''^2.$$

On a d'ailleurs d'après (1)

$$\theta_1\left(u,\ v - \frac{aa'b'}{\delta}\right) = \theta_1(u,\ v);$$

cette fonction de v est donc développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $e^{-\frac{2\pi i\delta}{aa'b'}v}$ si la quantité réelle $\frac{2\pi i\delta}{aa'b'}$ est positive et de $e^{+\frac{2\pi i\delta}{aa'b'}v}$ dans le cas contraire. Nous pouvons donc écrire, en nous plaçant dans la première hypothèse et posant $\frac{2\pi i\delta}{aa'b'} = d$

$$\theta_1(u,\ v) = \theta_1(u)e^{-dv} + \theta_2(u)e^{-2dv} + \ldots + \theta_n(u)e^{-ndv} + \ldots;$$

nous ne mettons pas de terme indépendant de v, puisque la fonction doit s'annuler pour $v = \infty$, c'est à dire $e^{-v} = 0$.

Les coefficients $\theta_1, \theta_2, \ldots$ sont des fonctions holomorphes de u.

Nous allons trouver les propriétés fondamentales de ces fonctions θ, en écrivant que

$$\theta_1\left[u + \frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}},\ v - \frac{a'\lambda}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(\mu b_0 - \nu a')\right] = \theta_1(u,\ v)$$

$$\theta_1\left[u + \frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}},\ v - \frac{a'\lambda'}{\sqrt{\delta}} u + \frac{b'}{\delta}(\mu' b_0 - \nu' a')\right] = \theta_1(u,\ v).$$

On trouve ainsi

(2)
$$\theta_n\left(u + \frac{\mu b'}{\sqrt{\delta}}\right) = e^{-\frac{na'\lambda d}{\sqrt{\delta}} u + \frac{ndb'}{\delta}(\mu b_0 - \nu a')} \cdot \theta_n(u)$$

$$\theta_n\left(u + \frac{\mu' b'}{\sqrt{\delta}}\right) = e^{-\frac{na'\lambda' d}{\sqrt{\delta}} u + \frac{ndb'}{\delta}(\mu' b_0 - \nu' a')} \cdot \theta_n(u).$$

La fonction $\theta_n(u)$ est donc une fonction *intermédiaire*. Nous appelons avec MM. Briot et Bouquet fonction intermédiaire une fonction holomorphe $f(u)$ qui satisfait aux équations

$$f(u + \omega) = e^{Au+B} f(u), \quad f(u + \omega') = e^{A'u+B'} f(u).$$

On sait que le quotient $\dfrac{A\omega' - A'\omega}{2\pi i}$ doit être un entier réel. Assurons nous que cette condition est effectivement vérifiée; ce quotient est ici

$$\frac{na'b'(\mu\lambda' - \mu'\lambda)}{\alpha a'b'}$$

or on a (paragraphe 15)

$$\alpha = ib_0', \quad \mu\lambda' - \mu'\lambda = 2tt_0 b_0' a' i;$$

le quotient se réduit alors à $2ntt_0 a'$, c'est bien un entier réel.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui est fondamental pour la suite de cette étude.

La fonction $\theta(\xi, \eta)$ peut, dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = -1$ se mettre sous la forme

$$\theta(\xi, \eta) = v^{3m}[\theta_1(u)e^{-dv} + \theta_2(u)e^{-2dv} + \ldots + \theta_n(u)e^{-ndv} + \ldots]$$

où

$$u = \frac{\xi}{\eta + 1}, \quad v = \frac{1}{\eta + 1} \quad \text{et} \quad d > 0.$$

Les fonctions $\theta_n(u)$ sont des fonctions holomorphes de u pour toute valeur de u; ce sont des fonctions intermédiaires satisfaisant aux équations (2).

On conclut de la forme précédente que $\theta(\xi, \eta)$ tend vers zéro quand le point (ξ, η) tend vers $\xi = 0$, $\eta = -1$.

21. Quelle que soit la fraction rationnelle R, la fonction $\theta(\xi, \eta)$ peut s'annuler pour certaines valeurs de ξ et η; ce sont les points qui restent invariables pour une substitution convenable du groupe (paragraphe 16). Ces points sont situés sur la limite du domaine fondamental R; s'ils sont en nombre limité, ce sont des sommets et dans le cas où il y en a une succession continue, ils forment des *arêtes* de ce domaine. Soit (ξ, η) un tel point et (A, B, C) la substitution qui le laisse invariable.

La relation générale:

$$\theta\left(\frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right) = (C\xi + C'\eta + C'')^{3m}\theta(\xi, \eta)$$

nous montre que

$$\theta(\xi, \eta) = (C\xi + C'\eta + C'')^{3m}\theta(\xi, \eta).$$

Nous avons désigné par k l'expression $C\xi + C'\eta + C''$ (paragraphe 16) et formé l'équation du troisième degré donnant k. On voit que si la valeur de k qui correspond au point (ξ, η) ne satisfait pas à l'équation

$$k^{3m} = 1$$

on aura nécessairement

$$\theta(\xi, \eta) = 0.$$

Il pourra donc y avoir certains sommets ou certaines arêtes du domaine fondamental pour les points desquelles la fonction θ s'annulera quelle que soit la fonction rationnelle $R(\xi, \eta)$ qui figure dans la formation. En dehors de ces points qui sont sur la limite du domaine fondamental R, il n'y aura pas dans ce domaine de points pour lesquels θ

s'annulera quelle que soit R; c'est ce qu'on peut montrer, en toute rigueur, par un raisonnement analogue à celui dont nous avons fait usage au paragraphe 18.

Ceci posé, je considère maintenant deux fonctions θ et θ_1, relatives au même nombre entier m et correspondant respectivement aux deux fractions rationnelles arbitraires R et R_1. Envisageons les deux équations

$$\theta(\xi, \eta) = 0, \qquad \theta_1(\xi, \eta) = 0.$$

R et R_1 étant quelconques, elles n'auront dans le domaine R d'autres points racines *formant une succession continue* que les *arêtes* particulières dont nous avons parlé plus haut, s'il en existe. Je dis de plus, que, abstraction faite de ces points, le nombre des racines communes à ces deux équations dans l'intérieur du domaine R est *fini*.

Il ne peut y avoir de difficulté qu'à cause des points A communs au domaine R et à la surface de S; c'est seulement dans le voisinage de ces points qu'il pourrait y avoir *dans* le domaine R un nombre infini de racines (ne formant pas d'ailleurs une succession continue) communes aux deux équations. Or considérons un tel point A, que nous supposons, comme plus haut, être le point $\xi = 0$, $\eta = -1$. On a:

$$\theta(\xi, \eta) = v^{3m}[\theta_1(u)e^{-dv} + \theta_2(u)e^{-2dv} + \ldots + \theta_n(u)e^{-ndv} + \ldots]$$

$$\theta_1(\xi, \eta) = v^{3m}[\vartheta_1(u)e^{-dv} + \vartheta_2(u)e^{-2dv} + \ldots + \vartheta_n(u)e^{-ndv} + \ldots]$$

et en supprimant le facteur v^{3m}, les équations précédentes s'écriront:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &e^{-dv}[\theta_1(u) + \theta_2(u)e^{-dv} + \ldots + \theta_n(u)e^{-(n-1)dv} + \ldots] = 0 \\ &e^{-dv}[\vartheta_1(u) + \vartheta_2(u)e^{-dv} + \ldots + \vartheta_n(u)e^{-(n-1)dv} + \ldots] = 0. \end{aligned}$$

On sait d'ailleurs, que, quand (ξ, η) à l'intérieur de R s'approche de $\xi = 0$, $\eta = -1$, la quantité v' (on pose $v = v' + iv''$) est positive et grandit indéfiniment. Les équations (1) ont donc la racine $e^{-dv} = 0$, ce qui donne $\xi = 0$, $\eta = -1$. Il peut arriver que tous les coefficients θ et ϑ aient une racine commune en u, v sera alors arbitraire et on aura une succession de points correspondant à une *arête* issue de A (voyez paragraphe 17). A l'exception de ces valeurs, il y aura seulement un

nombre fini de racines communes aux équations (1), pour lesquelles e^{-dc} sera moindre qu'une quantité ε, aussi petite que l'on voudra. Les deux équations

$$\theta(\xi, \eta) = 0, \qquad \theta_1(\xi, \eta) = 0$$

ont donc seulement un nombre limité de racines communes à *l'intérieur* d'un domaine fondamental.

22. Ce nombre fini de racines, pour un groupe donné et une valeur donnée de m, est indépendant des deux fractions rationnelles R et R_1 qui figurent dans la formation des fonctions θ et θ_1. On peut concevoir en effet une fraction rationnelle dépendant de certains paramètres arbitraires, coïncidant pour des valeurs particulières de ceux-ci d'abord avec R et avec R_1. Pour une variation infiniment petite de ces paramètres le nombre des racines reste le même; d'ailleurs si pour des valeurs spéciales des paramètres une ou plusieurs racines sortent du domaine fondamental par une certaine face, on est assuré que des racines en nombre égal entreront dans le domaine par la face opposée: *le nombre des racines est donc constant.*

En prenant le quotient de deux fonctions θ, on obtient une fonction $F(\xi, \eta)$ qui reste invariable par les substitutions du groupe G: nous donnons le nom de fonction *hyperfuchsienne* à toute fonction de cette nature. Il résulte immédiatement du théorème établi au paragraphe précédent qu'*entre trois fonctions hyperfuchsiennes existe une relation algébrique.*

Ceci posé, nous allons montrer qu'on peut trouver trois fonctions hyperfuchsiennes relatives au groupe G, telles que toute autre fonction hyperfuchsienne soit une fonction rationnelle des trois premières. Prenons d'abord deux fonctions hyperfuchsiennes quelconques indépendantes F et F_1; a et b étant deux constantes arbitraires, nous considérons les équations

$$F(\xi, \eta) = a, \qquad F_1(\xi, \eta) = b$$

et soit n le nombre de leurs solutions à *l'intérieur* du domaine fondamental, que nous désignons par

$$(1) \qquad (\xi_1, \eta_1), \ (\xi_2, \eta_2), \ \ldots, \ (\xi_n, \eta_n).$$

a et b étant arbitraires, on peut supposer que ces n points sont à l'intérieur et non sur la limite du domaine fondamental, c'est à dire que pour chacun d'eux il n'y a que la substitution unité qui le laisse invariable.

En raisonnant toujours comme dans un paragraphe précédent, nous montrons que θ et θ_1 étant deux fonctions correspondants aux fractions rationnelles R et R_1 et à un entier m, le quotient

$$F_2(\xi, \eta) = \frac{\theta_1(\xi, \eta)}{\theta_2(\xi, \eta)}$$

aura certainement, si m est pris suffisamment grand, et si R et R_1 sont quelconques, des valeurs *distinctes* pour les points de la suite (1).

On conclut de là que *toute fonction hyperfuchsienne est une fonction rationnelle de F, F_1 et F_2.* On a d'ailleurs entre ces trois fonctions une relation algébrique:

$$f(F, F_1, F_2) = 0.$$

23. Les fonctions hyperfuchsiennes peuvent être obtenues par l'inversion des quotients de trois solutions communes d'un système d'équations aux dérivées partielles. Reprenons les deux fonctions F_1 et F_2 du paragraphe précédent. Je pose

$$x = F_1(\xi, \eta), \quad y = F_2(\xi, \eta)$$

et soient les trois expressions

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\frac{\partial F_2}{\partial \eta} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\frac{\partial F_2}{\partial \xi}}, \quad z_2 = \xi . z_1, \quad z_3 = \eta . z_1 .$$

z_1, z_2 et z_3 sont des fonctions de ξ et η et peuvent par suite être considérées comme des fonctions de x et y. Or, quand on a trois fonctions de deux variables indépendantes x et y, on peut former un système de trois équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, auxquelles satisfont ces trois fonctions; soit, en désignant suivant l'usage par p, q, r, s, t les dérivées partielles de z,

$$r = ap + bq + cz$$

$$s = a_1p + b_1q + c_1z$$

$$t = a_2p + b_2q + c_2z.$$

Dans la première équation, on substituera à la place de z successivement z_1, z_2 et z_3, et on aura trois équations du premier degré pour déterminer a, b, c; on déterminera d'une manière semblable les coefficients des deux autres équations.

Les neuf coefficients précédents seront des fonctions de x et y: je dis qu'ici ce sont des fonctions algébriques de x et y. Il suffira, pour l'établir, de faire voir que ces coefficients sont des fonctions hyperfuchsiennes de ξ et η.

Prenons par exemple a, b, c; ils seront déterminés par les équations

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1$$

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} = a\frac{\partial z_2}{\partial x} + b\frac{\partial z_2}{\partial y} + cz_2$$

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x^2} = a\frac{\partial z_3}{\partial x} + b\frac{\partial z_3}{\partial y} + cz_3;$$

a, b, c seront des quotients de déterminants. La dénominateur commun est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & z_1 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & z_2 \\ \frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & z_3 \end{vmatrix}$$

et en remplaçant z_2 et z_3 respectivement par ξz_1 et ηz_1, on trouve de suite

$$z_1^3\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

Mais

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\frac{\partial F_2}{\partial \eta} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\frac{\partial F_2}{\partial \xi}};$$

par conséquent, le déterminant est égal à l'unité.

Soit maintenant le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & z_1 \\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & z_2 \\ \frac{\partial^2 z_3}{\partial x^2} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & z_3 \end{vmatrix}$$

il se réduit à

$$2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)z_1^2\frac{\partial z_1}{\partial x} + z_1^3\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right).$$

Or les dérivées partielles de ξ et η par rapport à x et y sont évidemment des fonctions uniformes de ξ et η, car on peut les tirer par différentiation des équations

$$x = F(\xi, \eta), \quad y = F_1(\xi, \eta).$$

z_1^3 est de plus une fonction uniforme des mêmes variables et par suite $z_1^2\frac{\partial z_1}{\partial x}$ qui représente à un facteur près $\frac{\partial z_1^3}{\partial x}$.

Le déterminant est donc une fonction uniforme de ξ et η. On peut reconnaître par une vérification directe que cette fonction est une fonction hyperfuchsienne; on y parvient plus simplement de la manière indirecte que voici. Lorsqu'on fait sur (ξ, η) une substitution quelconque du groupe, z_1, z_2 et z_3 se changent en z_1', z_2' et z_3', et on a:

$$z_1' = Cz_2 + C'z_3 + C''z_1$$

$$z_2' = Az_2 + A'z_3 + A''z_1$$

$$z_3' = Bz_2 + B'z_3 + B''z_1$$

les A, B, C étant des constantes. D'ailleurs x et y reprennent les mêmes valeurs quand ξ, η partant d'un système de valeurs arbitraires aboutissent à un système de valeurs équivalentes (c'est à dire qui se correspondent par une substitution du groupe); on a, par suite, pour déterminer les

transformées de a, b, c les mêmes équations que pour déterminer a, b, c: c'est dire que ces fonctions sont des fonctions hyperfuchsiennes.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Soient les trois fonctions hyperfuchsiennes

$$x = F_1(\xi, \eta), \quad y = F_2(\xi, \eta), \quad z = F(\xi, \eta)$$

du paragraphe précédent, liées par la relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

on peut former un système de trois équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a_1\frac{\partial z}{\partial x} + b_1\frac{\partial z}{\partial y} + c_1 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a_2\frac{\partial z}{\partial x} + b_2\frac{\partial z}{\partial y} + c_2 z$$

où les a, b, c sont des fonctions rationnelles de x, y et z [z étant la fonction algébrique de x et y définie par (1)]; *ces trois équations ont trois solutions communes linéairement indépendantes z_1, z_2 et z_3, et si on pose*

$$\frac{z_2}{z_1} = \xi, \quad \frac{z_3}{z_1} = \eta$$

ces équations résolues par rapport à x et y donnent précisément

$$x = F_1(\xi, \eta), \quad y = F_2(\xi, \eta).$$

24. Nous avons indiqué les propriétés les plus simples des fonctions hyperfuchsiennes; je ne pousserai pas en ce moment plus loin cette étude, me proposant d'y revenir ultérieurement, après avoir fait une étude approfondie de quelques cas particuliers.

Je vais revenir, en terminant, sur un exemple de fonctions hyperfuchsiennes dont je me suis précédemment occupé (Acta mathematica, T. 2); cet exemple ne se rattache pas aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées relatives aux entiers complexes $a + bi$ de

GAUSS, mais aux entiers formés avec les racines cubiques de l'unité, mais il est clair que des considérations analogues à celles dont nous avons fait usage dans ce mémoire peuvent être employées dans ce nouveau cas.

Nous avons vu que les trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles

$$9x(x-1)(x-y)r = (-5x^2+4xy+3x+2y)3p - 3y(1-y)q + (x-y)z$$
$$3(x-y)s = p-q$$
$$9y(y-1)(y-x)t = -3x(1-x)p + (-5y^2+4xy+3y+2x)q + (y-x)z$$

qui rentrent dans le type du paragraphe précédent, ont *trois* solutions communes linéairement indépendantes, et nous avons montré qu'en désignant par ω_1, ω_2 et ω_3 trois solutions convenables, les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v, et ces fonctions ne sont définies que pour les valeurs de u et v, comprises dans le domaine:

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

en posant

$$u = u' + iu'', \quad v = v' + iv''.$$

J'ai indiqué dans le mémoire cité les substitutions fondamentales du groupe relatif aux fonctions hyperfuchsiennes x et y; c'est là un point sur lequel je veux faire une rectification. Les substitutions désignées par S_1, S_2, S_3 (Acta mathematica, T. 2, p. 127 § 4), ne constituent pas toutes les substitutions fondamentales; elles ont été obtenues en laissant x constant et faisant varier y; par suite d'une erreur de calcul, j'avais cru que les substitutions obtenues en laissant y constant et faisant varier x rentraient dans les précédentes. J'ai reconnu depuis que le fait n'est pas exact, et trouvé ainsi deux nouvelles substitutions. En définitive, le groupe s'obtiendra en combinant de toutes les manières les *cinq* substitutions qui suivent $\left(\lambda = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$:

$$(S_1)\quad \begin{cases} U = \lambda^2 u - (\lambda - 1) \\ V = v + (\lambda - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{cases}$$

$$(S_2)\quad \begin{cases} U = \lambda^2 u + (1 - \lambda^2) \\ V = v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{cases}$$

$$(S_3)\quad \begin{cases} U = \lambda u \\ V = v \end{cases}$$

$$(S_4)\quad \begin{cases} U = \dfrac{u}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \\ V = \dfrac{\lambda v + (\lambda^2 - 1)}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \end{cases}$$

$$(S_5)\quad \begin{cases} U = \dfrac{(\lambda - \lambda^2)v + \lambda^2 u}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (1 - \lambda)u} \\ V = \dfrac{v}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (1 - \lambda)u}. \end{cases}$$

Je me propose de faire, dans un autre travail, l'étude approfondie de ce cas particulier, qui me paraît d'autant plus intéressant qu'il se rattache à une classe particulière de fonctions abéliennes. Je montrerai seulement quelles sont ici les trois substitutions permettant de mettre toute fonction θ, correspondant au groupe, sous la forme de développement en série du paragraphe 20.

Ces substitutions se tirent de S_1, S_2 et S_3.

En faisant le produit de S_3 et de S_2, on a

$$(1)\quad \begin{aligned} U &= u + 1 - \lambda^2 \\ V &= v + (\lambda - 1)u - (1 - \lambda^2). \end{aligned}$$

De même en composant S_3 et S_1, il vient:

$$(2)\quad \begin{aligned} U &= u + 1 - \lambda \\ V &= v + (\lambda^2 - 1)u - (1 - \lambda^2). \end{aligned}$$

En combinant S_2 et S_3 on a d'autre part

$$U = u + \lambda - 1$$
$$V = v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2).$$

Faisant le produit de cette dernière substitution avec la substitution (2), nous obtenons

$$(3) \qquad \begin{aligned} U &= u \\ V &= v + \lambda^2 - \lambda. \end{aligned}$$

Les substitutions (1), (2) et (3) ont la forme des trois substitutions employées au paragraphe 20.

Le domaine que nous avons ici à considérer est définie par l'inégalité

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0.$$

Un changement de variable bien simple, permet de le transformer dans le domaine hypersphérique, auquel nous avons tout ramené dans ce travail. Que l'on pose en effet

$$u = \frac{\xi}{1 + \eta}, \quad v = -\frac{1}{2}\,\frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Au domaine précédent correspondra le domaine hypersphérique

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1.$$

Pour le groupe précédent, toutes les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes s'expriment en fonction rationnelle de deux d'entre elles, convenablement choisies, par exemple les fonctions x et y; il ne correspond en effet à un système de valeurs de x et y, qu'un seul système de valeurs de u et v, en faisant bien entendu abstraction de celles qui s'en déduisent par les substitutions du groupe.

Paris, le 15 Janvier 1884.

ZUR THEORIE DER

STETIGEN FUNKTIONEN EINER REELLEN VERÄNDERLICHEN

VON

LUDWIG SCHEEFFER

in MÜNCHEN.

§ 1.

Ein Hauptsatz der Integralrechnung lautet:

Wenn die vorderen (hinteren) Differentialquotienten zweier stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ in einem Intervall x_0x_1 überall endlich, bestimmt und einander gleich sind, so besteht für alle Werte von x, die dem Intervall angehören, die Gleichung

$$F(x) = f(x) + \text{const.}$$

Dieser Satz, welcher für differentiirbare Funktionen gilt, ist ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes, welcher sich auf stetige Funktionen überhaupt bezieht.

Wir bezeichnen, wie dies schon in § 1 der *Untersuchungen über Rectification der Curven* (1) geschehen ist, die Unbestimmtheitsgrenzen des vorderen und hinteren Differentialquotienten einer Funktion als *vordere obere, vordere untere, hintere obere, hintere untere Ableitung* (Derivirte) und wenden die vier Symbole D^+, D_+, D^-, D_- für diese Begriffe an. Dann gilt der

Satz I. Es seien $F(x)$ und $f(x)$ zwei für alle Punkte des Intervalles x_0x_1 definirte stetige Funktionen. Wenn dann die vordere obere Ableitung

(1) Acta Mathematica, T. 5, p. 52.

von $F(x)$ (oder die vordere untere oder die hintere obere oder die hintere untere) überall endlich und gleich der entsprechenden Ableitung von $f(x)$ ist, so ist für alle Werte x, die dem Intervall angehören,

$$F(x) = f(x) + \textit{const.}$$

Beweis.

Es sei im ganzen Intervall $x_0 x_1$

$$D^+ F(x) = D^+ f(x).$$

Wir bilden die Funktion

$$\varphi(x) = cx + F(x) - f(x),$$

in welcher c eine willkürliche positive Constante ist. Dann wird notwendig

$$D^+ \varphi(x) \geqq c.$$

Nehmen wir nämlich eine zweite positive Constante δ an, so existiren zu jedem Werte von x beliebig kleine positive Werte h, für welche

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} > D^+ F(x) - \delta$$

ist. Ausserdem wird für *alle* positiven Werte h, die unterhalb einer gewissen Grenze liegen,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < D^+ f(x) + \delta.$$

Es giebt also beliebig kleine Werte h, welche der Bedingung

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > -2\delta$$

oder, was dasselbe ist, der Bedingung

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} > c - 2\delta$$

genügen. Demnach ist $D^+\varphi(x) \geqq c - 2\delta$, und, da δ beliebig war, $D^+\varphi(x) \geqq c$.

Wir behaupten weiter, dass die Funktion $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ im Intervall $x_0 x_1 (x_0 < x_1)$ niemals negativ wird. Wäre sie nämlich an der Stelle x' negativ, so würden die Werte x zwischen x_0 und x', für welche sie positiv oder gleich 0 ist, eine obere Grenze x'' haben. Da die Funktion stetig ist, würde $\varphi(x'') - \varphi(x_0) = 0$ sein, und es müsste für jeden Wert $h < x' - x''$ die Relation $\varphi(x'' + h) - \varphi(x'') < 0$ bestehn, welche mit der vorher gefundenen Relation $D^+\varphi(x) \geqq c$ unvereinbar wäre.

Daraus folgt weiter, dass auch

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)]$$

an keiner Stelle negativ werden kann. Anderenfalls würde, wenn man der Constanten c einen genügend kleinen Wert gäbe, auch $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ negativ werden, was unmöglich ist.

Vertauscht man in den vorhergehenden Entwickelungen $F(x)$ mit $f(x)$, so ergiebt sich schliesslich, dass auch die Funktion

$$[f(x) - F(x)] - [f(x_0) - F(x_0)]$$

niemals negativ, oder, was dasselbe ist, dass die Funktion

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)]$$

niemals positiv wird. Da wir eben sahen, dass diese Funktion niemals negativ wird, folgt, dass sie beständig gleich 0 ist. D. h. es besteht die Gleichung

$$F(x) - f(x) = F(x_0) - f(x_0).$$

w. z. b. w.

§ 2.

Der Satz I lässt verschiedene Erweiterungen zu. Um dieselben zu formuliren, nehmen wir eine Bezeichnung von Herrn G. Cantor an: Eine im Intervall $x_0 x_1$ beliebig definirte Punktmenge P besitzt *den Inhalt* $\mathfrak{J}$, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ die Menge

P immer in eine endliche Schaar von Intervallen eingeschlossen werden kann, deren Summe kleiner als $\mathfrak{J} + \delta$ ist, während es unmöglich ist, die Punktmenge in eine endliche Schaar von Intervallen einzuschliessen, deren Summe kleiner als $\mathfrak{J}$ ist.

Der Begriff einer Menge von Werten x mit dem Inhalt Null ist hiernach identisch mit dem von Herrn Harnack angewandten Begriffe der *discreten* Wertmenge.

Satz II. Wenn man von zwei im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutigen und stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss, dass die Gesammtheit der Werte von $F(x) - f(x)$, welche denjenigen Stellen entsprechen, an denen die vorderen oberen Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) entweder nicht beide endlich oder nicht einander gleich sind, höchstens eine Menge mit dem Inhalt Null bildet, so ist im ganzen Intervalle

$$F(x) = f(x) + \text{const.}$$

Beweis.

Wir bezeichnen diejenigen Stellen x, an welchen die Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ entweder nicht beide endlich oder nicht einander gleich sind, kurz als singuläre Stellen, die entsprechenden Werte der Funktion $y = F(x) - f(x)$ als singuläre Werte von y.

Liegt weder im Inneren noch auf der Grenze eines Intervalles xx' ein singulärer Wert von x, so ist die Funktion y in diesem Intervalle nach Satz I constant. Wir behaupten, dass y an keiner Stelle x einen von $y_0 = F(x_0) - f(x_0)$ verschiedenen Wert haben kann.

Hätte nämlich für $x = x'$ die Funktion y den Wert $y' = y_0 + c$, wo $c \gtrless 0$ ist, so könnte man unter den zwischen y_0 und y' gelegenen Grössen diejenigen, welche singulären Werten von y gleich sind, nach Voraussetzung in Intervalle schliessen, deren Summe kleiner als c wäre. Es liesse sich also zwischen y_0 und y' jedenfalls ein Intervall von angebbarer Länge bestimmen, welches keine einzige Grösse enthält, die einem singulären Werte von y gleich wäre. Die Grenzen eines solchen Intervalles seien $y = a_0$ und $y = a'$, wo $a_0 \gtrless a'$, und zwar sei a_0 die näher an y_0, a' die näher an y' gelegene dieser beiden Grössen. — Die stetige Funktion y wird zwischen x_0 und x' alle im Intervall $y_0 y'$ gelegenen

Werte annehmen, es müssen also zwischen x_0 und x' Werte von x vorkommen, für welche $y = a_0$ wird. Ist ξ_0 die obere Grenze dieser Werte, so wird $y = a_0$ für $x = \xi_0$. Im Intervalle $\xi_0 x'$ wird y alle zwischen a_0 und y' gelegenen Werte annehmen. Wir bezeichnen die untere Grenze der in diesem Intervall befindlichen Werte x, für welche $y = a'$ wird, mit ξ'. Dann nimmt y für $x = \xi'$ den Wert a' an. Im Intervall $\xi_0 \xi'$ liegt y offenbar immer zwischen den Grenzen a_0 und a'. Dieses Intervall enthält also keinen singulären Wert von x. Daher müsste, wie zuvor bewiesen ist, y innerhalb desselben constant und folglich $a' = a_0$ sein. Dies ist aber nicht der Fall.

Die Annahme $y' = y_0 + c$ $(c \gtrless 0)$ führt also zu einem Widerspruche. Es wird daher $y' = y_0$, d. h. allgemein

$$F(x) - f(x) = F(x_0) - f(x_0)$$

sein. w. z. b. w.

§ 3.

Der Satz II enthält implicite den folgenden

Satz IIa. Wenn man von zwei im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutigen und stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss, dass die Gesammtheit der Stellen x, an denen die vorderen oberen Ableitungen $D^+ F(x)$ und $D^+ f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) entweder nicht beide endlich oder nicht einander gleich sind, höchstens eine Menge P bildet, deren Ableitung(¹) P' endlich oder abzählbar unendlich(¹) ist, so ist im ganzen Intervall

$$F(x) = f(x) + \text{const.}$$

Um zu zeigen, dass dieser Satz in dem Satze II enthalten ist, brauchen wir zwei Hülfssätze.

Hülfssatz I. Es sei y eine im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutig definirte, stetige Funktion von x. Wenn dann P irgend eine Menge von Werten x ist, deren Ableitung P' endlich oder abzählbar unendlich ist, so bilden die zugehörigen Werte von y ebenfalls eine Menge Q, deren Ableitung Q' endlich oder abzählbar unendlich ist.

(¹) Nach der Definition von Herrn G. Cantor.

Beweis.

Es sei b irgend ein Wert von y, welcher zur Menge Q' gehört. Dann giebt es in jeder Nähe der Grösse b unendlich viele Werte, die zur Menge Q gehören. Da jedem dieser Werte mindestens ein zur Menge P gehöriger Wert von x entspricht, und da alle zu verschiedenen Werten von y gehörigen Werte x von einander verschieden sind, giebt es mindestens eine Stelle $x = a$ mit der Eigenschaft, dass in jeder Nähe derselben unendlich viele Stellen liegen, die zu P gehören und denen Werte von y entsprechen, die sich beliebig wenig von b unterscheiden. An der Stelle $x = a$, welche zur Menge P' gehört, nimmt die Funktion y, da sie stetig ist, notwendig den Wert b an.

Hiermit ist bewiesen, dass jedem Werte $y = b$, der zu Q' gehört, mindestens ein Wert $x = a$ entspricht, der zu P' gehört. Die Werte von y, welche allen in P' vorkommenden Werten von x entsprechen, enthalten also sämmtliche Werte der Menge Q'. Die Menge Q' ist daher endlich oder abzählbar unendlich, da P' nach Voraussetzung endlich oder abzählbar unendlich ist.

Hülfsatz II. Jede in einem endlichen Intervall enthaltene Wertmenge, deren Ableitung endlich oder abzählbar unendlich ist, hat den Inhalt Null.

Der Beweis dieses Satzes ist von Herrn G. Cantor gegeben worden (Mathematische Annalen B. 21, p. 54).

Beweis des Satzes II_a.

Die Gesammtheit derjenigen Stellen x, an denen die Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ entweder nicht beide endlich oder nicht einander gleich sind, bildet nach Voraussetzung eine Menge, deren Ableitung endlich oder abzählbar unendlich ist. Dasselbe gilt nach Hülfssatz I von den entsprechenden Werten der Funktion $y = F(x) - f(x)$. Die Gesammtheit der Werte y, welche den Stellen von der angegebenen Art entsprechen, hat also nach Hülfssatz II den Inhalt Null. Folglich sind die Voraussetzungen des Satzes II erfüllt und der Satz II_a ist auf jenen Satz zurückgeführt.

§ 4.

Der Satz I lässt noch eine andere Erweiterung zu, in welcher einige von den Herren du Bois-Reymond (1) und Harnack (2) gegebene Erweiterungen des Fundamentalsatzes der Integralrechnung enthalten sind.

Wir sagen, eine Funktion *sei in der Umgebung einer Stelle x grösser als jede endliche Zahl*, wenn nach Annahme einer beliebig grossen Zahl G in jeder Nähe der Stelle x andere Stellen existiren, an denen die Funktion grösser als G ist.

Dann besteht der

Satz III. Wenn man von zwei im Intervall x_0x_1 überall eindeutigen und stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss,

1) *dass die Gesammtheit der Stellen x, an welchen die vorderen oberen Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) beide endlich, aber um mehr als ε von einander verschieden sind, für jeden positiven Wert von ε höchstens eine Menge mit dem Inhalt Null bildet;*

2) *dass die Gesammtheit der Werte von $F(x) - f(x)$, welche den Stellen x entsprechen, an denen oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede endliche Zahl ist, ebenfalls eine Menge mit dem Inhalt Null bildet;*

so ist im ganzen Intervalle

$$F(x) = f(x) + \textit{const.}\ (3)$$

Zum Beweise brauchen wir einen Hülfssatz, den wir, obwohl er bekannt ist, (4) der Vollständigkeit wegen, kurz beweisen.

---

(1) Mathematische Annalen, B. 16, p. 115—128.

(2) Mathematische Annalen, B. 19, p. 235—279.

(3) Einige von Herrn Harnack angegebene Sätze (Mathematische Annalen, B. 19, p. 239—245), in welche unser Satz III für den Fall übergeht, dass $F(x)$ und $f(x)$ Funktionen mit integrirbaren Differentialquotienten sind, in welchen indess die Bedingung 2) nicht berücksichtigt ist, sind ungenau. Cf. *Untersuchungen über Rectification der Curven*, Beispiel 1 zu Theorem IV, Beispiel 2 in der Bemerkung zu Theorem VI.

(4) Cf. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 193—194.

Hülfssatz III. Wenn y eine von x_0 bis x_1 stetige Funktion von x ist, und wenn die vordere obere Ableitung (oder die vordere untere etc.) überall zwischen den Grenzen G und G' ($G > G'$) liegt, so liegt auch der Quotient $\frac{y'-y}{x'-x}$ für beliebige Werte von x und x' zwischen denselben Grenzen.

Beweis.

Es sei $x' > x$. Wäre $\frac{y'-y}{x'-x} > G$, so könnte man eine positive Grösse c so klein annehmen, dass, wenn $z = y - (G + c)x$ gesetzt wird, die Differenz $z' - z$ positiv, etwa gleich δ, würde. Dann müsste für x eine obere Grenze $x''(< x')$ existiren, wo die Relation $z' - z'' = \delta$ zum letzten Mal erfüllt wäre. An dieser Stelle wäre $D^+ z'' \geqq 0$, also $D^+ y'' \geqq G + c$, was gegen die Voraussetzung ist.

Wäre aber $\frac{y'-y}{x'-x} < G'$, so könnte man die positive Constante c so klein annehmen, dass, wenn $z = y - (G' - c)x$ gesetzt wird, die Differenz $z' - z$ negativ, etwa gleich $-\delta$, würde. Dann müsste für x eine obere Grenze $x''(< x')$ existiren, wo die Relation $z' - z'' = -\delta$ zum letzten Mal erfüllt wäre. An dieser Stelle würde $D^+ z'' \leqq 0$, oder $D^+ y'' \leqq G' - c$, was wiederum gegen die Voraussetzung ist.

Beweis des Satzes III.

A) Wir nehmen zunächst an, dass es keine einzige Stelle im Intervall $x_0 x_1$ oder auf der Grenze desselben giebt, an welcher oder in deren Umgebung eine der Ableitungen $D^+ F(x)$ und $D^+ f(x)$ absolut grösser als jede endliche Zahl wäre. Dann existirt eine endliche Grösse G, welche die obere Grenze der absoluten Werte von $D^+[F(x) - f(x)]$ im Intervall $x_0 x_1$ ist.

Setzen wir, wie in § 1,

$$\varphi(x) = cx + F(x) - f(x),$$

wo $c > 0$ ist, so haben auch die absoluten Werte von $D^+\varphi(x)$ im Intervall $x_0 x_1$ eine endliche obere Grenze, welche höchstens Gleich $G + c$ ist.

Es lässt sich nun zunächst, ebenso wie in § 1, zeigen, dass

$$D^+\varphi(x) \geqq c - \varepsilon$$

ist an allen Stellen x mit Ausnahme derjenigen, an denen $D^+F(x)$ von $D^+f(x)$ um mehr als ε verschieden ist, d. h. mit Ausnahme einer Menge von Werten x, deren Inhalt nach Voraussetzung Null ist. Wir bezeichnen diese Menge mit P_ε. Wählen wir ε kleiner als c, so kann ferner, wie in § 1, gezeigt werden, dass $\varphi(x') - \varphi(x)$ niemals negativ wird, wenn $x' > x$ ist und die Strecke xx' keinen Punkt der Menge P_ε enthält.

Wir behaupten, dass $\varphi(x') - \varphi(x)$ auch dann nicht negativ wird, wenn die Argumente x und x' beliebige dem Intervall x_0x_1 angehörige Werte annehmen, falls nur $x' > x$ ist.

Wäre nämlich $\varphi(x') - \varphi(x) = -\eta$, so würden wir die im Intervall xx' gelegenen Werte der Menge P_ε in eine endliche Schaar von Intervallen i einschliessen, deren Summe kleiner als $\frac{\delta\eta}{g}$ ist, wo δ kleiner als 1, g die obere Grenze der absoluten Werte von $D^+\varphi(x)$ im Intervall xx' oder, falls diese Grenze Null ist, eine beliebige positive Zahl ist. Bezeichnen wir den Anfangs- und Endpunkt eines der Intervalle i', welche von der Strecke xx' nach Ausschluss der Intervalle i übrig bleiben, mit ξ'_0 und ξ'_1, so ist, wie vorher gefunden,

$$\varphi(\xi'_1) - \varphi(\xi'_0) \geqq 0.$$

Bezeichnen wir ferner den Anfangs- und Endpunkt eines der Intervalle i mit ξ_0 und ξ_1, so ist nach Hülfssatz III

$$\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_0) \geqq -g(\xi_1 - \xi_0).$$

Also wird, wenn wir über alle Intervalle i' und i summiren und die Relation $\Sigma i < \frac{\delta\eta}{g}$ berücksichtigen,

$$\varphi(x') - \varphi(x) > -\delta\eta.$$

Die Annahme $\varphi(x') - \varphi(x) = -\eta$ führt demnach zu einem Widerspruche.

Es kann also für $x' > x$ die Differenz $\varphi(x') - \varphi(x)$ und, da die Constante c willkürlich ist, auch die Differenz

$$[F(x') - f(x')] - [F(x) - f(x)]$$

nicht negativ werden. Durch Vertauschung der Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ ergiebt sich schliesslich, dass jene Differenz auch nicht positiv sein kann. Es besteht daher notwendig die Gleichung

$$F(x') - f(x') = F(x) - f(x) = F(x_0) - f(x_0)$$

w. z. b. w.

B) Wir lassen jetzt die Beschränkung fallen, dass das Intervall $x_0 x_1$ keine Stelle enthalten soll, an welcher oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede endliche Zahl ist. Dagegen soll die im Satze III ausgesprochene Bedingung 2) erfüllt sein.

Wir bezeichnen dann diejenigen Stellen x, an denen oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede angebbare Zahl wird, kurz als singuläre Stellen, die zugehörigen Werte der Funktion $y = F(x) - f(x)$ als singuläre Werte von y.

Liegt weder im Inneren noch auf der Grenze eines Intervalles xx' ein singulärer Wert von x, so ist nach **A**) die Funktion y in diesem Intervall constant. Wir behaupten, dass y an keiner Stelle einen von $y_0 = F(x_0) - f(x_0)$ verschiedenen Wert haben kann.

Hätte nämlich y für $x = x'$ den Wert $y' = y_0 + c$ wo $c \gtrless 0$ ist, so könnte man, genau wie in § 2, für x zwei Werte ξ_0 und ξ' so bestimmen, dass denselben einerseits zwei verschiedene Werte a_0 und a' von y entsprechen, während andererseits in dem Intervall $\xi_0\xi'$ keine singuläre Stelle x liegt. Dies ist aber nach **A**) unmöglich, und daher kann die Annahme $y' = y_0 + c$ nicht richtig sein. Es ist also allgemein $y = y_0$, d. h. es gilt auch für diesen Fall die Gleichung

$$F(x) - f(x) = F(x_0) - f(x_0).$$

w. z. b. w.

§ 5.

Wie der Satz II implicite den Satz IIa enthielt, so enthält der Satz III den folgenden

Satz IIIa. Wenn man von zwei im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutigen und stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss,

1) *dass die Gesammtheit der Stellen x, wo die vorderen oberen Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) beide endlich, aber um mehr als ε von einander verschieden sind, für jeden positiven Wert von ε höchstens eine Menge mit dem Inhalt Null bildet;*

2) *dass die Gesammtheit der Stellen x, an denen oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede angebbare Zahl ist, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bildet:*

so ist im ganzen Intervall

$$F(x) = f(x) + \text{const.}$$

Beweis.

Die Gesammtheit derjenigen Stellen x, an denen oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede angebbare Zahl ist, bildet ihrer Natur nach eine abgeschlossene Menge P, d. h. eine Menge, deren Ableitung P' in P enthalten ist. Da P nach Voraussetzung endlich oder abzählbar unendlich ist, wird auch P' endlich oder abzählbar unendlich. Nach § 3 Hülfssatz I besitzt daher die Menge Q der Werte von $y = F(x) - f(x)$, welche zu den Werten P von x gehören, eine endliche oder abzählbar unendliche abgeleitete Menge Q'. Mit Rücksicht auf den Hülfssatz II ergiebt sich schliesslich, dass die Menge Q den Inhalt Null hat. Hiermit ist der Satz IIIa auf den Satz III zurückgeführt.

Wir schliessen, um ein naheliegendes Missverständniss zu vermeiden, mit der ausdrücklichen Bemerkung, dass der Satz II nicht als ein specieller Fall des Satzes III, und ebensowenig der Satz $\mathrm{II_a}$ als ein specieller Fall des Satzes $\mathrm{III_a}$ angesehen werden darf. Es besteht vielmehr der wesentliche Unterschied, dass in den Sätzen II und $\mathrm{II_a}$ nur diejenigen Stellen x, an denen eine der Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ unendlich gross ist, nebst den Verdichtungspunkten dieser Stellen, als singulär betrachtet werden; während in den Sätzen III und $\mathrm{III_a}$ auch diejenigen Stellen berücksichtigt sind, in deren Umgebung eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ grösser als jede angebbare Zahl wird, ohne den Wert ∞ wirklich anzunehmen.

Möglicher Weise können die Sätze III und $\mathrm{III_a}$ so verallgemeinert werden, dass die Sätze II und $\mathrm{II_a}$ als specielle Fälle derselben erscheinen. Es ist uns indess nicht gelungen, eine Verallgemeinerung in dieser Richtung streng durchzuführen.

Berlin, 21 December 1883.

Nachtrag zu pag. 189, *Note* 3. Wie aus einer inzwischen publicirten Note des Herrn Harnack hervorgeht (Mathematische Annalen, Bd. 23, p. 287), hat derselbe die Nothwendigkeit einer Vervollständigung seiner Sätze, sowie die Art, in welcher dieselbe geschehn muss, selbst bereits mehrere Monate vor dem Verfasser erkannt und wird darüber im zweiten Teile seiner Arbeit: *Ueber den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen* demnächst Ausführlicheres veröffentlichen.

München, 15 Mai 1884.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE

PAR

C. LE PAIGE

À LIÈGE.

Plusieurs Géomètres se sont occupés déjà de la configuration $[15_6, 20_3]$ à laquelle donnent lieu deux tétraèdres homologiques, et ont montré le rôle important qu'elle joue dans l'étude des surfaces du troisième ordre, soit par rapport aux vingt-sept droites de la surface, (¹) soit pour l'interprétation géométrique de certains invariants de la forme cubique quaternaire. (²)

Nous nous proposons d'en faire voir une application différente et de rattacher l'existence de cette figure à des considérations que nous avons développées ailleurs.

Nous avons fait voir, dans divers travaux antérieurs, (³) l'utilité de l'homographie H_2^3 dans la théorie des surfaces cubiques; pour aborder les questions actuelles, l'emploi des homographies biquadratiques ne nous paraît pas dénué d'intérêt.

Considérons une surface quelconque S_3 et, dans une section faite par un plan arbitraire ω, inscrivons un quadrilatère complet, ce qui est toujours possible à moins de positions spéciales du plan ω.

(¹) CREMONA, Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1877. Math. Annal., T. XIII, p. 301. CAPORALI, Accad. dei Lincei, 1878. VERONESE, Annali di Matematica, 1882, p. 173. Math. Annal., T. XIX, p. 194.

(²) R. DE PAOLIS, Accad. dei Lincei, T. X, p. 123.

(³) Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3ᵉ Série, T. V, p. 85. C. R., T. XCVII. Acta Mathematica, T. 3, p. 181.

Soient x, y, z, u, les côtés de ce quadrilatère. Il est visible que si nous joignons tous les points de S_3 aux côtés du quadrilatère, nous obtenons quatre faisceaux de plans en H_2^4.

Pour le démontrer, observons que si l'on considère x, y, z, u, comme les traces, sur le plan dont l'équation est

$$\omega \equiv \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

du tétraèdre dont les faces sont représentées par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

l'équation d'une surface cubique, circonscrite à ce quadrilatère, pourra s'écrire:

$$S_3 \equiv A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3$$
$$+ \frac{1}{2}(A - B)\alpha\beta(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}(A - C)\alpha\gamma(\alpha - \gamma) + \frac{1}{2}(A - D)\alpha\delta(\alpha - \delta)$$
$$+ \frac{1}{2}(B - C)\beta\gamma(\beta - \gamma) + \frac{1}{2}(B - D)\beta\delta(\beta - \delta) + \frac{1}{2}(C - D)\gamma\delta(\gamma - \delta)$$
$$+ A_1\alpha\beta(\alpha + \beta) + A_2\alpha\gamma(\alpha + \gamma) + A_3\alpha\delta(\alpha + \delta) + A_4\beta\gamma(\beta + \gamma)$$
$$+ A_5\beta\delta(\beta + \delta) + A_6\gamma\delta(\gamma + \delta) + P_1\alpha\beta\gamma + P_2\alpha\beta\delta + P_3\alpha\gamma\delta + P_4\beta\gamma\delta = 0.$$

Or, considérons quatre faisceaux de plans

$$\alpha - \lambda\omega = 0, \quad \beta - \mu\omega = 0, \quad \gamma - \nu\omega = 0, \quad \delta - \rho\omega = 0,$$

liés par la relation d'homographie H_3^4 la plus générale:

$$F \equiv A_0\lambda\mu\nu\rho + a_0\lambda\mu\nu + a_1\lambda\mu\rho + a_2\lambda\nu\rho + a_3\mu\nu\rho + b_0\lambda\mu + b_1\lambda\nu + b_2\lambda\rho$$
$$+ b_3\mu\nu + b_4\mu\rho + b_5\nu\rho + c_0\lambda + c_1\mu + c_2\nu + c_3\rho + \theta = 0.$$

Les intersections des plans correspondants décriront une surface S_4, contenant les quatre droites x, y, z, u.

Cette surface se composera d'une S_3', circonscrite au quadrilatère, et du plan ω, si $A_0 = 0$.

Si nous identifions l'équation de S_3 avec celle de S_3', nous trouvons que la forme quadrilinéaire F peut s'écrire

$$F \equiv f + \theta . \varphi,$$

où

$$\varphi \equiv \lambda + \mu + \nu + \rho - 1.$$

Mais il est évident que les plans homologues ne donneront un point de S_3 que s'ils concourent, c'est-à-dire si l'on a $\varphi = 0$.

Nous aurons donc simultanément, pour les plans qui donnent des points de S_3, les deux relations

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

Par suite, ces plans appartiennent, comme nous l'avons dit, à quatre faisceaux en H_2^4.

A chaque valeur de θ, correspond une forme quadrilinéaire F. Or, nous avons montré [1] que l'on peut toujours, par un choix convenable des variables, ramener cette forme à l'expression canonique:

$$F \equiv a_{1111}x_1y_1z_1u_1 + a_{1122}x_1y_1z_2u_2 + a_{1212}x_1y_2z_1u_2 + a_{1221}x_1y_2z_2u_1$$
$$+ a_{2222}x_2y_2z_2u_2 + a_{2211}x_2y_2z_1u_1 + a_{2121}x_2y_1z_2u_1 + a_{2112}x_2y_1z_1u_2.$$

Appelons α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2, les plans des quatre faisceaux qui correspondent aux éléments fondamentaux, nous aurons l'équation:

$$\omega S_3 \equiv a_{1111}\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 + a_{1122}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + a_{1221}\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_1$$
$$+ a_{2222}\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2 + a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 + a_{2121}\alpha_2\beta_1\gamma_2\delta_1 + a_{2112}\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2 = 0.$$

Les quatre covariants biquadratiques de F sont de la forme:

$$L_t^4 = l_t^4 + \theta l_t'^4 + \theta^2 l_t''^4 + \theta^3 l_t'''^4,$$

les covariants biquadratiques de φ étant identiquement nuls.

Ces quatre covariants auront un même discriminant que nous désignerons par Δ.

Pour déterminer son degré en θ, nous observerons que la forme développée de L_t^4 est

$$L_t^4 \equiv (A_0 + \theta B_0)t_1^4 + 4(A_1 + \theta B_1)t_1^3 t_2 + 6(A_2 + \theta B_2 + \theta^2 C_2)t_1^2 t_2^2$$
$$+ 4(A_3 + \theta B_3 + \theta^2 C_3)t_1 t_2^3 + (A_4 + \theta B_4 + \theta^2 C_4 + \theta^3 D_4)t_2^4.$$

---

[1] *Sur la forme quadrilinéaire:* Atti della R. Accademia di Torino, T. XVII, p. 299, Février 1882.

Il en résulte que nous pourrons écrire

$$\Delta = A_{ii}^{12}.$$

Si nous nous reportons aux résultats contenus dans notre travail relatif aux formes quadrilinéaires, nous verrons aisément que la condition $\Delta = 0$, entraîne nécessairement l'évanouissement d'un des coefficients de la forme canonique F et que quatre éléments fondamentaux sont précisement représentés par les racines carrés des facteurs carrés qui entrent dans les covariants biquadratiques.

L'évanouissement de l'un quelconque des paramètres de F, revenant à un changement de notation, nous pouvons supposer que la condition

$$\Delta = A_{ii}^{12} = 0,$$

entraîne celle-ci: $a_{2222} = 0$.

Alors l'équation écrite plus haut devient:

$$\omega S_3 \equiv a_{1111}\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 + a_{1122}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + a_{1221}\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_1$$
$$+ a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 + a_{2121}\alpha_2\beta_1\gamma_2\delta_1 + a_{2112}\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2 = 0.$$

Mais on voit aisément que le tétraèdre $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ a ses quatre sommets sur S_3 et forme, par suite, avec ω, un pentaèdre complet inscrit à la surface. (1)

Nous pouvons observer que le plan ω étant donné, nous ne pourrons plus déterminer arbitrairement qu'un des côtés du quadrilatère $xyzu$. x étant choisi, par exemple, il n'existera, en général, que trois systèmes y, z, u.

Lorsque le quadrilatère est déterminé, nous voyons que nous pouvons, en général, choisir θ de douze façons différentes, de telle manière que les covariants biquadratiques de F aient un facteur carré; les plans correspondant à ces facteurs donnent alors un pentaèdre inscrit à S_3. (2)

---

(1) Au sujet des pentaèdres inscrits à une S_3, voir le beau travail de M. Friedr. Schur: *Erzeugung durch collineare Grundgebilde* (Mathematische Annalen, T. 17, p. 26).

(2) Une inadvertence nous avait d'abord porté à attribuer à Δ le degré dix-huit; mais notre savant Collègue M. H.-G. Zeuthen ayant déterminé par la méthode énumérative le nombre des pentaèdres inscrits (V. plus loin), nous avons reconnu que la forme particulière de L_i^4 conduit au degré douze pour le discriminant Δ.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

On peut inscrire, à une surface S_3, trois systèmes de douze pentaèdres dont on choisit arbitrairement une face et une arête dans cette face.

Ces pentaèdres forment évidemment une quintuple infinité.

Lorsque les covariants biquadratiques fondamentaux de F sont des carrés, nous aurons à la fois, par exemple

$$a_{1111} = 0, \quad a_{2222} = 0.$$

Donc l'équation de S_3 peut s'écrire:

$$\omega S_3 \equiv a_{1122}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + a_{1221}\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_1 + a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 + a_{2121}\alpha_2\beta_1\gamma_2\delta_1 + a_{2112}\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2 = 0.$$

Alors les deux tétraèdres $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ sont tous les deux inscrits à S_3: nous les appellerons *associés*.

Pour obtenir cette forme réduite, le choix de l'indéterminée θ ne suffit plus, puisqu'il faut remplir deux conditions.

Pour arriver à la déterminer, nous ferons usage de la remarque suivante.

Comme les groupes de quatre points marqués par tous les plans de l'espace sur quatre droites arbitraires, représentent précisement une forme quadrilinéaire à covariants quartiques carrés, (1) nous sommes conduit à nous poser cette question:

Etudier la surface engendrée par les intersections des plans concourants que l'on obtient en joignant quatre droites situées dans un plan ω, respectivement aux points marqués sur quatre droites arbitraires par tous les plans de l'espace.

Il est visible que le plan ω fait partie du lieu, qui est complété par une surface S_3, circonscrite au quadrilatère tracé dans ω.

---

(1) La démonstration de la proposition inverse étant un peu longue, nous ne la donnerons pas actuellement.

Nous mentionnerons ici une application intéressante que M. Neuberg a faite de ce cas particulier d'une H_3^4 à l'étude de *tétraèdres de* Möbius (Mem. de la Société Royale des Sciences de Liège, 2e Série, T. XI).

Soient x, y, z, u les côtés du quadrilatère donné; A, A'; B, B', C, C' les sommets opposés de telle sorte que ABC sont situés sur x; et enfin x_1, y_1, z_1, u_1 les quatre droites arbitraires de l'espace, ne se rencontrant pas deux à deux et n'appartenant pas à un même système de génératrices d'une surface du second ordre.

Sur ces quatre droites s'appuient deux transversales g_1, g_2, qui les rencontrent respectivement en des points $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$.

Il est d'abord visible que le plan $\overline{x_1g_1}$ laisse indéterminé le plan du faisceau (x) et donne trois plans $\overline{yB_1}$, $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$ se coupant en un point X_1 de la surface.

De cette façon, nous pouvons observer que les quatre plans $\overline{xA_1}$, $\overline{yB_1}$, $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$ forment un tétraèdre $X_1Y_1Z_1U_1$ inscrit à S_3; $\overline{xA_2}$, $\overline{yB_2}$, $\overline{zC_2}$, $\overline{uD_2}$ constituent, de même, un second tétraèdre inscrit $X_2Y_2Z_2U_2$.

Les deux tétraèdres $X_1Y_1Z_1U_1$, $X_2Y_2Z_2U_2$ sont homologiques et leurs sommets correspondants sont situés sur quatre droites X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2, U_1U_2 concourant en un point Q.

Occupons-nous maintenant de déterminer certains éléments qui nous seront utiles.

Les génératrices de l'hyperboloïde $(y_1z_1u_1)$ marquent, sur ces droites, des ponctuelles projectives dont les groupes de trois points associés sont tels que le plan du faisceau (x) est évidemment indéterminé.

Les intersections des plans qui joignent y, z, u, aux points correspondants de ces trois ponctuelles sont donc sur S_3. Or il est visible que ces intersections appartiennent à une cubique gauche c_3, passant par X_1, X_2, A', B', C'.

Maintenant considérons les plans du faisceau x_1. Ils coupent x_1, z_1, u_1 en des ponctuelles projectives et laissent indéterminés les plans du faisceau (x).

Les jonctions de ces trois nouvelles ponctuelles à y, z, u, donnent une seconde cubique gauche k_3, située sur S_3, et passant également par X_1, X_2, A', B', C'.

On voit aisément que c_3 et k_3 sont sur une même surface S_2. En effet, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, c_3 et k_3 constituent une courbe gauche du neuvième ordre, base du faisceau de surfaces du troisième ordre qui correspondent aux points de x_1.

Or, celle de ces surfaces du troisième ordre qui correspond au point où x_1 perce ω est évidemment composée du plan ω et d'une S_2.

Donc c_3 et k_3 sont deux cubiques de systèmes différents tracées sur S_3.

Nous aurons de même des cubiques gauches des deux systèmes passant respectivement par $Y_1Y_2BA'C$, $Z_1Z_2AB'C$, $U_1U_2BC'A$.

Nous pouvons maintenant observer que X_1X_2, Y_1Y_2 sont dans un plan passant par A'.

En effet les plans $\overline{yB_1}$, $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$ donnent X_1; $\overline{xA_1}$, $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$ donnent Y_1. Donc X_1, Y_1 sont situés sur l'intersection des plans $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$, droite qui passe par A'.

Il en résulte que $\overline{X_1X_2}$, $\overline{Y_1Y_2}$ sont deux bisécantes, ne passant pas par A', de deux cubiques gauches k_3, k_3' d'un même système, et situées dans le plan $A'X_1X_2Y_1Y_2$.

Donc Q, intersection de ces deux bisécantes est située sur S_3.[1]

Les dix sommets du quadrilatère $xyzu$, les huit sommets des deux tétraèdres et le centre d'homologie Q constituent une configuration $(15, 20)$ dont tous les points sont situés sur S_3.

Ces remarques nous conduisent à la détermination, sur une S_3 quelconque, d'une pareille configuration et nous permettent, par suite, de ramener l'équation de cette surface à la forme réduite:

$$\omega S_3 \equiv a_{1122}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + \ldots + a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 = 0.$$

Sur la surface donnée, choisissons arbitrairement deux points X_1, X_2, par lesquels nous faisons passer deux cubiques gauches c_3, k_3, appartenant aux deux systèmes différents: ces deux cubiques se coupent en trois points $A'B'C'$ déterminant un plan.

Si de X_1, nous projetons c_3, nous obtenons un cône du second degré qui coupe S_3 suivant une cubique gauche k_3' du même système que k_3. De la même manière k_3 nous conduit à une courbe c_3'.

X_1A', X_1B', X_1C', rencontrent S_3 en trois points Y_1, Z_1, U_1 situés sur k_3' et c_3'.

Maintenant $A'B'$, Y_1Z_1, situés dans le plan $X_1A'B'$ sont des bisécantes des deux cubiques gauches k_3, k_3' (et aussi de c_3, c_3'); donc d'après le théorème invoqué déjà, elles se coupent en un point C de S_3. De la même façon $B'C'$, Z_1U_1; $C'A'$, U_1X_1, donnent des points A, B de la surface. Il est évident, d'ailleurs, que ABC sont en ligne droite.

---

[1] Reye, *Geometrie der Lage*, II[te] Absch. p. 197, (2[de] édition 1882).

En faisant usage de X_2, nous aurions de même $Y_2 Z_2 U_2$. Les deux tétraèdres $X_1 Y_1 Z_1 U_1$, $X_2 Y_2 Z_2 U_2$ sont homologiques. Soit Q le point où $X_1 X_2$ rencontre S_3.

$X_2 A'$, QY_1 sont situés dans un plan passant par X_1, car QY_1 et $X_2 A'$ s'appuient sur $QX_1 X_2$ et $X_1 Y_1 A'$.

Or les deux courbes gauches c_3, c_3' passent respectivement par $X_1 X_2 A'B'C'$, $X_1 Q Y_1 Z_1 U_1$. $X_2 A'$ et QY_1 se coupent donc en un point de S_3. Or $X_2 A'$ rencontre S_3 en Y_2. Donc QY_1 passe par Y_2. Il en résulte que Q est le centre d'homologie des deux tétraèdres.

Nous avons donc bien, de cette manière, inscrit à S_3, une configuration $[15_6, 20_3]$.

Soient i, k, l, m, n, p six indices quelconques.

Les plans de la configuration $[15_6, 20_3]$ pourront être représentés par ω_{ik}, les points par P_{ik}, les droites par g_{ikl}.

Alors ω_{ik} contient les six points P_{lm} (l, m, différents de ik) et les quatre droites g_{ikl} (l différent de i, k);

par P_{ik} passent les six plans ω_{lm} et les quatre droites g_{lmn}; la droite g_{lmn} contient les points P_{ik}, P_{kp}, P_{pi} et par elle passent les plans ω_{lm}, ω_{mn}, ω_{nl}.

Par suite, si nous prenons un plan quelconque de la configuration, l'équation de S_3 pourra s'écrire:

$$\omega_{ik} S_3 \equiv A\omega_{kl} . \omega_{kn} . \omega_{im} . \omega_{ip} + B\omega_{kl} . \omega_{km} . \omega_{in} . \omega_{ip} + C\omega_{kl} . \omega_{kp} . \omega_{in} . \omega_{im}$$

$$+ A'\omega_{il} . \omega_{in} . \omega_{km} . \omega_{kp} + B'\omega_{il} . \omega_{im} . \omega_{kn} . \omega_{kp} + C'\omega_{il} . \omega_{ip} . \omega_{kn} . \omega_{km} = 0.$$

On peut donner quinze formes distinctes à cette équation.

Les sommets homologues de deux tétraèdres associés sont P_{im}, P_{km}; P_{in}, P_{kn}; P_{il}, P_{kl}; P_{ip}, P_{kp} et les jonctions de ces sommets passent par P_{ik}.

Liège, le 11 Avril 1884.

SUR LES PENTAÈDRES COMPLETS
INSCRITS À UNE SURFACE CUBIQUE

Extrait d'une lettre à M. C. Le Paige

PAR

H.-G. ZEUTHEN
à COPENHAGUE.

Voici comment je détermine le nombre des pentaèdres complets, inscrits à une surface cubique, et dont une des faces et le quadrilatère complet inscrit qu'il doit contenir, sont déjà connus.

Soient A, A_1; B, B_1; C, C_1 les couples de sommets opposés du quadrilatère, A, B, C étant sur une droite tandis que A_1, B_1, C_1 forment un triangle.

Je fais passer par ABC un plan quelconque. Dans ce plan il y aura 3 quadrilatères complets inscrits à la surface et ayant A, B et C pour sommets. (¹) Soient A_2, B_2, C_2 les sommets opposés dans un de ces quadrilatères. Je cherche alors le lieu du point d'intersection P des plans $B_1C_1AB_2C_2$, $C_1A_1BC_2A_2$, $A_1B_1CA_2B_2$.

On obtient l'ordre de ce lieu, qui sera une courbe, en déterminant le nombre de ses intersections avec le plan $A_1B_1C_1$.

Si l'on fait coïncider le plan $A_2B_2C_2$ avec $A_1B_1C_1$, un des trois triangles $A_2B_2C_2$ coïncide avec $A_1B_1C_1$, et le point P qui y correspond, et qui sera déterminé par l'intersection des plans tangents aux surfaces coniques, lieux des droites AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2, ne se trouvera pas dans

(¹) Il est très-facile de donner de ce théorème plan connu une démonstration analogue à la démonstration stéréométrique actuelle.

Acta mathematica. 5. Imprimé 11 Août 1884.

le plan $A_1B_1C_1$; mais les points P qui correspondent aux deux autres triangles $A_2B_2C_2$ s'y trouveront évidemment. On trouve ainsi 2 intersections.

Remarquons, pour chercher s'il en existe d'autres, que, dans le cas qui nous occupe, du moins un des trois plans qui déterminent P doit coïncider avec $A_1B_1C_1$. Supposons donc que le plan $B_1C_1AB_2C_2$ coïncide avec $A_1B_1C_1$ et que le plan $A_2B_2C_2$ en diffère. Alors la droite AB_2C_2 coïncidera avec ABC, le point B_2 avec C et le point C_2 avec B. La droite CB_2 devient ainsi tangente à la surface donnée en C, et BC_2 en B. Le dernier sommet A_2 de ce quadrilatère complet inscrit doit donc être un des trois points où la droite d'intersection des plans tangents en B et en C rencontre la surface.

On trouve ainsi que le point A_1 est un point triple de notre lieu. Ses tangentes en A_1 seront, d'après la construction des points P, celles qui le joignent aux trois points A_2 que nous venons de trouver. Les trois branches en A_1 ne seront donc en général tangentes ni au plan $A_1B_1C_1$, ni à la surface donnée.

Les points B_1 et C_1 étant dans la même condition que A_1, le lieu sera de l'ordre

$$2 + 3 \cdot 3 = 11.$$

On aurait aussi pu déterminer l'ordre du même lieu en comptant ses intersections avec un plan quelconque par la droite ABC.

Les points d'intersection du lieu trouvé avec la surface donnée seront:

1°. Les trois qui coïncident avec chacun des points A_1, B_1 et C_1.

2°. Les 12 points de contact de la surface avec des plans passant par ABC. On voit sans difficulté que les intersections ayant lieu en ces points sont en général simples.

3°. Les dixièmes sommets des pentaèdres cherchés. (Les neuf autres seront A, B, C; A_1, B_1, C_1 et les points A_2, B_2, C_2 correspondant aux points du lieu.)

Le nombre cherché sera donc égal à

$$3 \cdot 11 - 3 \cdot 3 - 12 = 12.$$

Copenhague le 20 Avril 1884.

BEITRÄGE ZUR
THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

VON

H. SCHROETER

in BRESLAU.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn G. Mittag-Leffler.)

1.

In Ihrer Zeitschrift Acta mathematica Bd. 1, S. 368, befindet sich eine Note: *Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques, par Ch. Hermite,* worin Herr Hermite einen Beweis für die Cayley'sche Relation liefert, der sich stützt auf das Additionstheorem für die zweite Gattung der elliptischen Integrale $[Z(u)]$. Die Cayley'sche Relation kann indessen als eine unmittelbare Folge aus dem ursprünglichen Additionstheorem der eigentlichen elliptischen Functionen hergeleitet werden, und ich vermuthe, dass Cayley auf diesem Wege zu seiner Relation gelangt sein wird. Gestatten Sie mir, in wenigen Zeilen Ihnen diese Herleitung mitzutheilen:

Bekanntlich lässt das Additionstheorem für die elliptischen Functionen u. a. folgende Gestalt zu: (1)

$$\mathrm{cn}(u) \,.\, \mathrm{cn}(v) = \mathrm{cn}(u+v) + \mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}(v) \,.\, \mathrm{dn}(u+v)$$

$$\mathrm{dn}(u) \,.\, \mathrm{dn}(v) = \mathrm{dn}(u+v) + k^2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}(v)\,\mathrm{cn}(u+v).$$

---

(1) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke II, p. 325.

Sind die vier Argumente u, v, r, s der Bedingung unterworfen:

$$u + v + r + s = 0,$$

also

$$(u + v) = -(r + s)$$

so haben wir

$$\operatorname{cn}(u + v) = \operatorname{cn}(r + s)$$

$$\operatorname{dn}(u + v) = \operatorname{dn}(r + s)$$

$$\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v) = \operatorname{cn}(u + v) + \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(u + v)$$

$$\underline{\operatorname{cn}(r)\operatorname{cn}(s) = \operatorname{cn}(r + s) + \operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s)\operatorname{dn}(r + s)}$$

$$\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{cn}(r)\operatorname{cn}(s) = \operatorname{cn}^2(u + v) + \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s)\operatorname{dn}^2(u + v)$$
$$+ \{\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v) + \operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s)\}\operatorname{cn}(u + v)\operatorname{dn}(u + v)$$

$$\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v) = \operatorname{dn}(u + v) + k^2\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u + v)$$

$$\underline{\operatorname{dn}(r)\operatorname{dn}(s) = \operatorname{dn}(r + s) + k^2\operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s)\operatorname{cn}(r + s)}$$

$$\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)\operatorname{dn}(r)\operatorname{dn}(s) = \operatorname{dn}^2(u + v) + k^4\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s)\operatorname{cn}^2(u + v)$$
$$+ k^2\{\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v) + \operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s)\}\operatorname{cn}(u + v)\operatorname{dn}(u + v).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$k^2\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{cn}(r)\operatorname{cn}(s) - \operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)\operatorname{dn}(r)\operatorname{dn}(s)$$
$$= \{k^2\operatorname{cn}^2(u + v) - \operatorname{dn}^2(u + v)\}\{1 - k^2\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s)\}$$

und da

$$k^2\operatorname{cn}^2(u + v) - \operatorname{dn}^2(u + v) = -k'k'$$

ist, so folgt die Cayley'sche Relation:

$$-k^2k'^2.\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s) + k^2\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{cn}(r)\operatorname{cn}(s)$$
$$-\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)\operatorname{dn}(r)\operatorname{dn}(s) + k'k' = 0. \qquad (u+v+r+s=0)$$

Andererseits springt es unmittelbar in die Augen, dass diese Relation als

specieller Fall aus dem bekannten Fundamental-Theorem für das Product von vier Thetafunctionen sich ergiebt [1]:

$$2\,.\,\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z')$$
$$= \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)$$
$$+ \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$

wo

$$w' = \frac{1}{2}(w + x + y + z)$$

$$x' = \frac{1}{2}(w + x - y - z)$$

$$y' = \frac{1}{2}(w - x + y - z)$$

$$z' = \frac{1}{2}(w - x - y + z)$$

ist, wenn man $w' = \frac{1}{2}(w + x + y + z) = 0$ setzt und die Verhältnisse der Thetafunctionen durch die elliptischen Functionen ersetzt:

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\,.\,\mathrm{sn}\,(u), \qquad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}\,(u), \qquad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{dn}\,(u).$$

Verbindet man mit der vorigen Thetaformel die zweite:

$$2\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z')$$
$$= \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) - \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$$
$$- \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)$$

so ergiebt der Quotient eine Formel für die elliptischen Functionen, welche für vier unbeschränkte Argumente u, v, r, s Gültigkeit hat und also lautet:

$$k^2\,\mathrm{sn}\left(\frac{u+v+r+s}{2}\right)\mathrm{sn}\left(\frac{u+v-r-s}{2}\right)\mathrm{sn}\left(\frac{u-v+r-s}{2}\right)\mathrm{sn}\left(\frac{u-v-r+s}{2}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)\mathrm{dn}(r)\mathrm{dn}(s) - k^2\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{cn}(r)\mathrm{cn}(s) + k^2k'k'.\,\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{sn}(r)\mathrm{sn}(s) - k'k'}{\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)\mathrm{dn}(r)\mathrm{dn}(s) - k^2\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{cn}(r)\mathrm{cn}(s) - k^2k'k'.\,\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{sn}(r)\mathrm{sn}(s) + k'k'}$$

u. s. w.

---

(1) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke I, p. 507.

2.

Bei dieser Gelegenheit gestatten Sie mir, Ihre Aufmerksamkeit noch auf einen andern Punkt der Theorie der elliptischen Functionen zu lenken.

Ein eigenthümliches Interesse bieten nämlich ihrer einfachen Gestalt wegen die irrationalen Formen der Modulargleichungen für die Transformation der Ordnungen $(3 \cdot 2^n - 1)$ der elliptischen Functionen, die sich gegenwärtig so gestalten:

Transf. der 5ten Ordn.: $\quad \kappa\lambda + \kappa_1\lambda_1 + 2\sqrt[3]{4\kappa\lambda\kappa_1\lambda_1} = 1 \qquad \begin{pmatrix} \kappa^2+\kappa_1^2=1 \\ \lambda^2+\lambda_1^2=1 \end{pmatrix}$

Transf. der 11ten Ordn.: $\quad \sqrt{\kappa\lambda} + \sqrt{\kappa_1\lambda_1} + 2\sqrt[6]{4\kappa\lambda\kappa_1\lambda_1} = 1$

Transf. der 23ten Ordn.: $\quad \sqrt[4]{\kappa\lambda} + \sqrt[4]{\kappa_1\lambda_1} + \sqrt{2\sqrt[12]{4\kappa\lambda\kappa_1\lambda_1}} = 1$

(letztere von AD. HURWITZ angegeben in F. KLEIN, Sitzungsberichte der Münchener Acad. der Wiss: 6 Dec. 1879 und aus der von mir in CRELLE's Journal Bd. 58, S. 378 angegebenen complicirteren Form leicht abzuleiten), welche eine gewisse Analogie darbieten mit den längst bekannten Modulargleichungen für die

Transf. der 3ten Ordn.: $\quad \sqrt{\kappa\lambda} + \sqrt{\kappa_1\lambda_1} = 1$

Transf. der 7ten Ordn.: $\quad \sqrt[4]{\kappa\lambda} + \sqrt[4]{\kappa_1\lambda_1} = 1.$

Es liegt nahe, nach diesen Formen ein allgemeineres zu Grunde liegendes Gesetz zu vermuthen, allein ein solches scheint doch hier nicht stattzufinden, sondern nur in diesen wenigen ersten Fällen gestalten sich die Modulargleichungen so ausserordentlich einfach; die von GAUSS(1) herrührende Form der Modulargleichung für die Transf. der 5ten Ordn. scheint JACOBI nicht gekannt zu haben.(2)

Breslau, 21 Juni 1884.

---

(1) C. F. GAUSS, Werke Bd. III, S. 475. Vrgl. auch W. GOERING: *Untersuchungen über die Theilwerthe der JACOBI'schen Thetafunctionen und die im GAUSS'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben.* Mathematische Annalen, Bd. VII, S. 340.

(2) Vrgl. die Bemerkung JACOBI's im 37ten Bd. des CRELLE'schen Journals S. 249.

MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS ZÉTAFUCHSIENNES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

§ 1. *Introduction.*

Considérons une équation linéaire quelconque d'ordre p:

$$(1)\qquad \frac{d^p v}{dx^p} + \sum_{k=0}^{k=p-1} \varphi_k(x, y)\frac{d^k v}{dx^k} = 0, \qquad\qquad (2)\qquad \psi(x, y) = 0$$

où les φ sont des fonctions rationnelles et où la relation (2) est algébrique. Soit maintenant une équation auxiliaire:

$$(3)\qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = \theta(x, y)w$$

où $\theta(x, y)$ est une fonction rationnelle telle que *tous les points singuliers de l'équation* (1) *appartiennent à l'équation* (3). Soit a un point singulier appartenant à la fois aux deux équations; ce point singulier regardé comme appartenant à (1) nous conduira à une équation déterminante E de degré p; regardé comme appartenant à (3), il nous conduira à une équation déterminante E' du second degré. Soit δ la différence des deux racines de E'. Je suppose que θ ait été choisi de telle sorte que *δ soit nul* ou bien que *δ étant une partie aliquote de l'unité toutes les racines de l'équation E' soient des multiples de δ.* Dans le cas où *dans le voisinage du point a les intégrales de l'équation* (1) *seraient irrégulières, δ devrait être supposé nul.* Il faut enfin que même pour les points singuliers de (3)

qui n'appartiennent pas à l'équation (1), δ soit nul ou soit une partie aliquote de l'unité et que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières.

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer θ. Supposons même que l'on choisisse arbitrairement les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à (1) et les équations déterminantes relatives à tous les points singuliers de (3) en satisfaisant toutefois aux diverses conditions que nous venons d'énoncer. Quand ce choix sera fait, θ ne sera pas encore entièrement déterminé, et il y restera un certain nombre de paramètres arbitraires. Dans divers mémoires, antérieurement insérés aux Acta mathematica, j'ai démontré qu'on pouvait disposer de ces paramètres:

1° d'une manière et d'une seule, de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle;

2° d'une infinité de manières, de telle façon que x et y soient fonctions kleinéennes de z n'existant pas dans tout le plan.

3° d'une manière et d'une seule de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes et kleinéennes de z existant dans tout le plan.

Dans tous ces cas les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions uniformes de z.

Nous supposerons pour fixer les idées que l'équation (3) ait été choisie de telle sorte que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont le centre est 0 et le rayon 1 (1ère, 2me et 6me familles). Alors les intégrales de l'équation (1) pourront se mettre sous la forme du quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances de z et convergentes tant que z reste intérieur au cercle fondamental; elle sont dont *toujours* convergentes puisque la variable z ne peut jamais sortir de ce cercle.

Envisageons un cas particulier remarquable, celui où δ est nul pour tous les points singuliers de l'équation (3) et où par conséquent x et y sont des fonctions fuchsiennes de la 2e famille. Dans ce cas, les intégrales de l'équation (1) de même que x et y, sont des fonctions holomorphes de z à l'intérieur du cercle fondamental. Toutes ces fonctions peuvent se développer en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z et *toujours* convergentes puisque le cercle de convergence est le cercle fondamental et que la variable ne sort jamais de ce cercle. Quant aux coëfficients de ces séries, on les calcule aisément par récurrence et par

la méthode des coëfficients indéterminés, dès que l'on connait les coëfficients des équations (1), (2) et (3).

Ainsi on peut trouver des développements des intégrales qui sont toujours valables et à ce point de vue, il est, dès à présent, permis de dire que nous savons intégrer toutes les équations linéaires à coëfficients algébriques.

Mais les développements ainsi obtenus ne sont pas satisfaisants pour l'esprit, parce que les différents termes ne se déduisent pas les uns des autres par une loi simple. Il faut donc chercher à exprimer les intégrales par des séries dont tous les termes soient donnés par une formule générale simple, comme l'étaient par exemple les termes des séries thétafuchsiennes. Tel est l'objet du présent mémoire. Les séries que je vais chercher à obtenir seront moins propres peut-être au calcul numérique que les développements suivant les puissances de z, mais elles seront plus instructives et nous permettront de pénétrer plus profondément dans l'étude intime des fonctions qu'elles représentent.

Toutefois dans ce qui va suivre, je serai obligé de supposer que l'équation (1) a toutes ses intégrales *régulières* pour employer l'expression de MM. Fuchs, Thomae et Frobenius. Dans le cas où il y aurait des intégrales irrégulières, rien de ce que je vais dire ne serait plus applicable et je ne sais, au sujet de ces équations irrégulières, rien de plus que ce que j'ai démontré dans les quatre mémoires antérieurs. J'avais, il est vrai, dans les Mathematische Annalen, énoncé un résultat particulier sur ces équations irrégulières, mais ce résultat est inexact; j'avais été trompé par une fausse interprétation d'un théorème de M. Klein dont je ne connaissais pas la démonstration.

§ 2. *Classification des équations linéaires.*

Soient

$$(1) \qquad \frac{d^p v}{dx^p} + \sum \varphi_k(x, y)\frac{d^k v}{dx^k} = 0, \qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

$$(1') \qquad \frac{d^p u}{dx^p} + \sum \varphi'_k(x, y)\frac{d^k u}{dx^k} = 0$$

deux équations linéaires d'ordre p à coëfficients rationnels en x et y. Je dirai que ces deux équations appartiennent à la même *famille* si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme:

$$u = A\left[F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx} + F_2 \frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + F_{p-1} \frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}\right]$$

v étant l'intégrale générale de l'équation (1), les F étant des fonctions rationnelles de x et de y, et A une fonction quelconque de x et de y. Elles appartiendront à la même *espèce* si la fonction A est égale à 1.

Si les deux équations (1) et (1') sont de la même espèce, elles auront *même groupe,* c'est à dire que lorsque le point (x, y) décrira un contour quelconque sur la surface de Riemann (2), les intégrales de l'équation (1') subiront précisément la même substitution linéaire que les intégrales de l'équation (1). Si les deux équations sont seulement de la même famille, elles n'ont plus même groupe, mais quand le point (x, y) décrit un contour quelconque, on obtient les valeurs finales des intégrales de (1') en appliquant aux valeurs initiales la substitution qu'ont subie les intégrales de (1) et en multipliant ensuite tous les résultats ainsi obtenus *par un même facteur.* Ainsi les *rapports* des intégrales de (1') ont subi précisément la même transformation que les rapports des intégrales de (1).

Soit:

$$u' = \frac{u}{A} = F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx} + \ldots + F_{p-1} \frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}},$$

u' satisfera à une équation à coëfficients rationnels en x et y:

$$(1'') \qquad \frac{d^p u'}{dx^p} + \sum \varphi''_k \frac{d^k u'}{dx^k} = 0.$$

On aura alors, en faisant $u = Au'$ dans (1') et divisant par A:

$$(1''') \qquad \frac{d^p u'}{dx^p} + p\frac{A'}{A}\frac{d^{p-1}u'}{dx^{p-1}} + \varphi'_{k-1}\frac{d^{p-1}u'}{dx^{p-1}} + \ldots = 0.$$

Les deux équations (1'') et (1''') étant irréductibles, doivent être identiques d'où:

$$\frac{A'}{A} = \frac{\varphi''_{k-1} - \varphi'_{k-1}}{p}.$$

Il suit de là que la dérivée logarithmique de A est rationnelle en x et y. Donc A est une de ces fonctions étudiées par M. APPELL et analogues aux fonctions doublement périodiques de 2[de] espèce. De plus, quand sur la surface de RIEMANN (2), le point analytique (x, y) décrit un cycle ou bien un contour fermé autour d'un point singulier, la fonction A est simplement multipliée par un facteur constant.

Etudions maintenant ce qui se passe dans le voisinage d'un point quelconque, et pour cela rappelons les différents cas qui peuvent se présenter, d'après les travaux de M. FUCHS:

1°. Il peut arriver que le point singulier $x = a$ que l'on étudie soit *irrégulier,* c'est à dire que parmi les intégrales il y en ait au moins une qui soit irrégulière et par conséquent développable en série de la forme suivante:

$$(x - a)^\alpha \sum A_n (x - a)^n$$

où dans la série l'exposant n peut prendre toutes les valeurs entières positives et négatives.

Il est aisé de voir que si le point $x = a$ est un point irrégulier pour l'équation (1), il sera aussi un point irrégulier pour toutes les équations de la même espèce. Quant aux équations de la même famille elles auront toutes aussi un point irrégulier au point a (sauf le cas particulier où on pourrait rendre les intégrales de l'équation (1) régulières en les multipliant par une même fonction μ).

Nous supposerons d'ailleurs dans tout ce qui va suivre qu'aucune des équations que nous considérerons ne présente de point irrégulier. Ainsi tous les points singuliers de (1) et de (1') seront supposés *réguliers.*

2°. Il peut arriver ensuite que le point singulier $x = a$ soit *logarithmique,* c'est à dire que parmi les intégrales de l'équation (1) il y en ait au moins une de la forme:

$$(x - a)^\alpha [\varphi + \psi \log(x - a)]$$

φ et ψ étant holomorphes. Si le point $x = a$ est un point logarithmique pour l'équation (1), il sera aussi un point logarithmique pour toutes les équations de la même famille.

3°. Il peut arriver enfin que le point $x = a$ soit un point singulier *ordinaire* ou un point *non singulier*. Dans ce cas, il y a p intégrales de la forme suivante:

$$(x-a)^{\lambda_1}\varphi_1, \quad (x-a)^{\lambda_2}\varphi_2, \ \ldots, \ (x-a)^{\lambda_p}\varphi_p$$

les φ étant holomorphes. Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les racines d'une équation facile à former et qu'on appelle équation déterminante. *En général,* lorsque cette équation a une racine double ou deux racines ne différant que d'un nombre entier, on a affaire à un point singulier logarithmique; il peut arriver cependant, si certaines conditions sont remplies, que le point singulier soit ordinaire, quoique la différence de deux racines de l'équation déterminante soit un entier.

Il peut se faire alors:

1° ou bien que l'équation aux différences des racines de l'équation déterminante n'ait pas toutes ses racines entières, auquel cas le point $x = a$ est un point singulier *proprement dit.*

2° ou bien que les p racines de l'équation déterminante soient de la forme:

$$k + h_1, \quad k + h_2, \ \ldots, \ k + h_p$$

k étant une quantité non entière et $h_1, h_2, \ldots, h_p$ étant des entiers. Alors $x = a$ (s'il n'est pas logarithmique, ce que je suppose) est un point *à apparence singulière* (cf. *Sur les groupes des équations linéaires,* Acta mathematica, T. 4, page 217).

3° ou bien que les p racines soient entières. Alors pour $x = a$ toutes les intégrales sont holomorphes ou méromorphes; ce point est un point singulier *polaire* (s'il n'est pas logarithmique, ce que je suppose toujours).

4° enfin si les p racines en question sont précisément

$$0, 1, 2, \ldots, (p-1)$$

on a affaire à un point *non singulier.*

Que se passera-t-il dans le voisinage d'un point non logarithmique si l'on passe de l'équation (1) à une équation de la même famille ou de la même espèce?

Soit $x = a$ un point non logarithmique; considérons trois équations linéaires (1), (1') et (1''), la seconde de la même espèce que (1), la troisième de la même famille que (1). Soient (3), (3') et (3'') les équations déterminantes relatives à ces trois équations différentielles et au point $x = a$. Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

les racines de (3). Celles de (3') seront:

$$\alpha_1 + h_1, \alpha_2 + h_2, \ldots, \alpha_p + h_p$$

et celles de (3'') seront:

$$\beta + \alpha_1 + h_1, \beta + \alpha_2 + h_2, \ldots, \beta + \alpha_p + h_p$$

β étant quelconque et les h étant des entiers positifs ou négatifs.

D'où les conséquences suivantes: Si le point $x = a$ est un point singulier *proprement dit* pour l'équation (1), il en sera un aussi pour les équations (1') et (1''). Si ce point est un point *non-singulier* pour l'équation (1), il sera non singulier ou polaire pour (1') et il sera non singulier, polaire ou à apparence singulière pour (1'').

Donc deux équations de la même famille ont les mêmes points singuliers proprement dits (logarithmiques ou non logarithmiques). Mais les points à apparence singulière (et en particulier les points polaires) peuvent être différents.

Supposons maintenant que les deux équations (1) et (1') soient dépourvues de second terme, c'est à dire que:

$$\varphi_{p-1} = \varphi'_{p-1} = 0.$$

Dans ce cas la somme des racines de l'équation déterminante est égale à:

$$\frac{p(p-1)}{2}.$$

Supposons que ces racines soient toutes entières sans être précisément égales à

$$0, 1, 2, \ldots, (p-1)$$

c'est à dire que nous ayons affaire à un point singulier polaire. La somme des racines doit être égale à la somme des $p - 1$ premiers nombres. D'ailleurs deux racines ne peuvent être égales, car il est aisé de constater que l'équation déterminante relative à un point singulier non logarithmique ne peut avoir deux racines égales. Donc une au moins des racines devra être négative; donc le point $x = a$ est un pôle pour une des intégrales de l'équation (1), ce qui justifie le nom de *point polaire* donné à cette sorte de point singulier.

Envisageons d'abord des équations du 2[d] ordre. La somme des racines de l'équation déterminante est égale à 1; leur différence est égale à 1 pour les points non-singuliers, à un nombre entier plus grand que 1 pour les points à apparence singulière, à un nombre non entier pour les points singuliers non logarithmiques, à 0, à 1 ou à un entier pour les points logarithmiques.

Nous ferons les conventions suivantes: Si pour un point à apparence singulière, cette même différence est égale à $n + 1$, nous dirons que nous avons affaire à un point à apparence singulière du n^e ordre, ou encore à n points à apparence singulière confondus. Si pour un point singulier logarithmique ou non cette même différence, dont nous pouvons toujours supposer la partie réelle positive, est égale à $n + \lambda$, λ étant un nombre dont la partie réelle λ_1 satisfait aux inégalités

$$0 \leqq \lambda_1 < 1$$

nous dirons que nous avons affaire à un point singulier et à n points à apparence singulière confondus.

Grâce à ces conventions, l'énoncé du théorème qui va suivre est un peu simplifié. Je dis que si l'équation (1) a un nombre pair de points à apparence singulière, il en sera de même de l'équation (1′) et inversement. En effet, soit:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi v = 0 \tag{1}$$

l'équation (1), posons:

$$u = A\left(F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx}\right).$$

Soient A_0, A_1 et M des fonctions telles que:

$$A_0 F_0 = \frac{dM}{dx}, \qquad A_0 F_1 = M, \qquad A = A_0 A_1$$

d'où

$$u = A_1 \frac{d}{dx}(Mv).$$

Il résulte de là que le passage d'une équation du 2[d] ordre à une autre de même famille peut toujours être obtenu par la série d'opérations suivantes:

1°. Multiplier la fonction inconnue par un facteur convenable.

2°. La différentier.

3°. La multiplier de nouveau par un facteur convenable.

La première et la dernière de ces trois opérations ne modifient pas la différence des racines de l'équation déterminante. La seconde opération seule peut altérer cette différence. Voici comment: je suppose d'abord que l'on ait pour la fonction inconnue v le développement suivant:

$$v = \lambda(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots) + \mu(B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots)$$

λ et μ étant des constantes d'intégration; ce développement montre de plus que les racines de l'équation déterminante sont 0 et 1. Si l'on a:

$$\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = h$$

il viendra pour le développement de $\frac{dv}{dx}$:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(3Dx^2 + \ldots) + (\mu + \lambda h)(B' + 2C'x + 3D'x^2 + \ldots)$$

ce qui montre que les racines de l'équation déterminante sont devenues 0 et 2. Ainsi la différentiation peut faire apparaitre de nouveaux points à apparence singulière, mais elle en peut aussi faire disparaitre. Soit en effet

$$v = \lambda(A + Bx + Cx^2 + \ldots) + \mu(C'x^2 + D'x^3 + \ldots)$$

le développement de v. On voit que l'équation déterminante a pour racines o et 2. Si l'on différentie, il vient:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(B + 2Cx + \ldots) + \mu(2C'x + 3D'x^2 + \ldots)$$

où l'on voit que les racines sont devenues o et 1. En général, toutes les fois que l'une des racines de l'équation déterminante sera nulle, sans que l'autre soit égale à 1, la différentiation fera augmenter ou diminuer d'une unité la différence de ces racines, et elle ne pourra la faire varier si l'une des racines n'est pas nulle.

Soit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi_1\frac{dv}{dx} + \varphi_0 v = 0 \tag{4}$$

l'équation à laquelle satisfait v; sa dérivée

$$w = \frac{dv}{dx}$$

satisfera à

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\varphi_1 - \frac{\varphi'_0}{\varphi_0}\right)\frac{dw}{dx} + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1\varphi'_0}{\varphi_0} + \varphi'_1\right)w = 0. \tag{5}$$

Il s'est introduit par la différentiation de nouveaux points à apparence singulière, définis par l'équation:

$$\varphi_0 = 0.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, que l'infini soit un point singulier ordinaire, d'où il résulte que φ_0 doit être une fonction rationnelle de degré -2. La fonction φ_0 aura $2d + s$ infinis, parmi lesquels d infinis doubles et s infinis simples. Elle aura k zéros de sorte que:

$$k = 2d + s - 2$$

ou

$$k \equiv s \pmod 2.$$

A chaque infini simple de φ_0 correspond une équation déterminante dont une des racines est nulle; par conséquent, par la différentiation la différence

de ces racines diminuera ou augmentera d'une unité. D'après les conventions faites plus haut, il disparaîtra ou il s'introduira un point à apparence singulière. Ainsi par le fait des s infinis simples de φ_0, il s'introduira σ pareils points où:

$$\sigma \equiv s \pmod 2.$$

Par le fait des k zéros de φ_0, il s'introduira k points à apparence singulière, de sorte qu'il s'en est introduit en tout:

$$k + \sigma \equiv 0 \pmod 2.$$

Donc la parité du nombre des points à apparence singulière n'a pas varié.

§ 3. *Réduction des équations linéaires.*

Parmi les équations d'une même famille, il en est une que l'on peut regarder comme plus simple que toutes les autres. On peut se proposer, étant donnée une équation linéaire, de trouver la transformation qui la *réduira* à l'équation la plus simple de sa famille.

Afin d'éviter des complications inutiles et qui ne touchent pas au fond des choses, je traiterai un cas particulier.

Je supposerai que l'équation à réduire est du 2[d] ordre et que ses coëfficients sont rationnels en x, et j'écrirai cette opération sous la forme:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi_0 v = 0. \tag{1}$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les points singuliers, $b_1, b_2, \ldots, b_h$ les points à apparence singulière; je supposerai que les racines des équations déterminantes relatives à ceux-ci soient $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Réunissons dans une même classe toutes les équations de la forme (1) où les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_k, \infty$ sont les mêmes avec les mêmes équations déterminantes, et où la parité du nombre h de points apparents est la même. Chaque classe contiendra une infinité de familles. Il y aura un certain nombre de fonctions des coëfficients des équations d'une même classe qui auront

la même valeur pour celles de ces équations qui appartiennent à une même famille. Ce sont des invariants qui définissent la famille et différents de ceux qui définissent la classe. Combien y a-t-il de pareils invariants? En d'autres termes, combien faut-il de conditions pour que deux équations, qui sont déjà supposées appartenir à une même classe, appartiennent aussi à une même famille?

Soit θ une fonction rationnelle quelconque de x. Posons:

$$-\varphi_0 + \psi = \theta^2 - \frac{d\theta}{dx}.$$

La fonction

$$u = \frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\theta v + \frac{dv}{dx}\right)$$

satisfera à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u\left[-\frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi} + \frac{3}{4}\frac{\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi'\theta}{\psi} + 2\theta' - \varphi_0\right] = 0. \tag{2}$$

Le coëfficient de u, que nous appellerons Φ pour abréger, admet comme infinis doubles:

1°. Les infinis de φ_0 qui sont en général des infinis de ψ.

2°. Les zéros de ψ.

Le rapport des intégrales de (1) subit certaines substitutions linéaires formant un groupe G lorsque la variable x décrit certains contours dans son plan. Si les équations (1) et (2) appartiennent à la même famille, le rapport des intégrales de (2) subira *les mêmes* substitutions linéaires formant le même groupe G, et réciproquement, si ces deux rapports subissent les mêmes substitutions, les deux équations appartiennent à la même famille.

Il résulte de là que le nombre cherché des invariants est au plus égal au nombre des paramètres arbitraires du groupe G. Or ce groupe est dérivé de k substitutions, ce qui fait $3k$ paramètres, puisque chaque substitution dépend de 3 paramètres. Mais les équations (1) et (2) sont assujetties à appartenir à une classe déterminée; on connait les multiplicateurs de ces k substitutions correspondant à des contours infiniment petits décrits autour de chaque point singulier et celui de la substitution qui correspond à un contour infiniment grand. Il reste $2k - 1$ paramètres.

Mais si l'on remarque que deux groupes G et $\sigma^{-1}G\sigma$, où σ est une substitution linéaire quelconque, ne doivent pas être regardés comme distincts, on verra qu'il n'y a en réalité que $2k - 4$ paramètres arbitraires.

Ainsi le nombre des invariants ne peut dépasser $2k - 4$. Il sera précisément égal à ce nombre, si l'on peut trouver dans chaque classe une équation admettant un groupe donné, sans que les coëfficients de ce groupe soient assujettis à aucune relation d'égalité. Comme nous démontrerons plus loin ce théorème, nous admettrons que le nombre des invariants est $2k - 4$ en nous dispensant de faire le calcul direct qui ne présente d'ailleurs pas de difficulté.

L'équation *réduite*, c'est à dire la plus simple des équations d'une famille donnée, dépendra donc encore de $2k - 4$ paramètres. Quel est donc le minimum des points à apparence singulière que l'on peut lui attribuer? Supposons que l'équation (2) soit réduite. Elle admettra k points singuliers et h' points apparents; la fonction Φ qui est de degré -2 a donc $k + h'$ infinis doubles et dépend par conséquent de $3k + 3h' - 1$ coëfficients. Mais il y a entre eux $2k + 2h' + 1$ relations qui expriment que l'équation appartient à la classe considérée et que les h' points en question sont bien des points à apparence singulière. Il reste donc $k + h' - 2$ paramètres. Or ce nombre doit être au moins égal à $2k - 4$. On doit donc avoir:

$$h' \geqq k - 2.$$

Mais on a de plus $h \equiv h' \pmod 2$; le nombre minimum des points apparents est donc $k - 2$ si k et h sont de même parité et $k - 1$ si k et h sont de parité différente. Dans le premier cas, il n'y a dans la famille qu'un nombre fini d'équations n'ayant que $k - 2$ points apparents et on peut prendre l'une d'elles comme équation réduite. Dans le second au contraire il y a une infinité d'équations de la même famille n'ayant que $k - 1$ points apparents.

On peut encore prendre l'une d'elles pour équation réduite, mais cela ne suffit pas pour la déterminer. Nous achèverons de la définir en lui imposant cette condition que l'un des points apparents devra avoir une valeur déterminée par exemple 0.

Voici maintenant comment on peut arriver à réduire l'équation

linéaire (1). Nous supposerons d'abord que k et h sont de même parité. Soient alors

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$$

les points singuliers,

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_h$$

les points à apparence singulière.

La fonction φ_0 pourra s'écrire:

$$\sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{B_i}{x-a_i} + \sum \frac{C_i}{(x-b_i)^2} + \sum \frac{D_i}{x-b_i}.$$

On aura d'ailleurs:

$$C_i = +\frac{3}{4}, \qquad D_i^2 + E_i = 0 \tag{3}$$

en supposant pour fixer les idées que tous les points apparents soient distincts entre eux et distincts des points singuliers. Dans ces équations E_i représente le résultat de la substitution de b_i à la place de x dans la fonction

$$\varphi_0 - \frac{C_i}{(x-b_i)^2} - \frac{D_i}{x-b_i}.$$

Posons maintenant:

$$\psi = \frac{\alpha(x-b_1)(x-b_2)\ \ldots\ (x-b_h)(x-d_1)(x-d_2)\ \ldots\ (x-d_{k-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ \ldots\ (x-a_k)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\ \ldots\ (x-c_m)^2}$$

où α, les d et les c sont jusqu'à nouvel ordre indéterminés et où $2m = h - k$; il est clair que m ne peut être négatif, car si h était plus petit que k la réduction serait terminée.

Nous allons disposer des indéterminées de telle façon que la fonction

$$R = -\varphi_0 + \psi$$

qui est rationnelle de degré -2 puisse se mettre sous la forme:

$$\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$$

θ étant rationnel et de degré -1.

Soient en général $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les infinis de θ, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ les résidus:

$$\theta = \sum \frac{\mu_i}{x - \lambda_i}.$$

Soit θ_i et θ_i' le résultat de la substitution de λ_i dans les fonctions

$$\theta - \frac{\mu_i}{x - \lambda_i} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dx} + \frac{\mu_i}{(x - \lambda_i)^2}$$

il viendra:

$$R = \theta^2 - \frac{d\theta}{dx} = \sum \frac{\mu_i^2 + \mu_i}{(x - \lambda_i)^2} + 2\sum \frac{\theta_i \mu_i}{x - \lambda_i}.$$

Si l'on a

$$R = \sum \frac{M_i}{(x - \lambda_i)^2} + \sum \frac{N_i}{x - \lambda_i}$$

on devra donc avoir

$$M_i = \mu_i^2 + \mu_i$$

ce qui détermine les μ_i et par conséquent la fonction θ. On peut donc choisir arbitrairement les M_i et les λ_i mais non les N_i, d'où il résulte que pour qu'une fonction rationnelle de degré -2 ayant p infinis doubles puisse se mettre sous la forme $\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$, il faut $p - 1$ conditions; la p^e condition qui achèverait de définir les p quantités N_i, c'est que leur somme doit être nulle.

Dans le cas particulier qui nous occupe, il y a $m + h + k$ infinis doubles; il nous faut donc satisfaire à

$$m + h + k - 1 = 3m + 2k - 1$$

conditions et pour cela nous ne disposons que de $m + k - 1$ arbitraires. Il faut donc voir si h de nos conditions sont remplies d'elles-mêmes. Pour cela supposons qu'on retranche de R les deux termes qui deviennent infinis pour $x = \lambda_i$ et que l'on appelle R_i le résultat de la substitution de λ_i dans les termes restants, il est aisé de vérifier que l'on a:

$$R_i = \theta_i^2 + (2\mu_i - 1)\theta_i'. \tag{4}$$

Parmi les infinis de R, considérons les points $b_1, b_2, \ldots, b_h$ par exemple le point b_i. Soit donc $b_i = \lambda_i$; il viendra:

$$M_i = - C_i = + \frac{3}{4}, \qquad \mu_i^2 + \mu_i = \frac{3}{4}.$$

Parmi les valeurs qui satisfont à cette condition nous choisirons

$$\mu_i = \frac{1}{2}$$

de sorte que l'équation (4) devient

(4′) $$R_i = \theta_i^2.$$

On a d'autre part:

$$N_i = 2\mu_i\theta_i = \theta_i, \qquad N_i = - D_i$$

de sorte que la condition (4′) se réduit à

(4″) $$R_i = D_i^2.$$

Mais pour $x = b_i = \lambda_i$, la fonction ψ s'annule de sorte qu'il reste simplement

$$R_i = - E_i$$

et

$$E_i + D_i^2 = 0$$

de sorte que la condition (4″) se réduit à l'une des équations (3) et est satisfaite d'elle-même.

On pourra donc disposer des $m + k - 1$ paramètres arbitraires pour satisfaire aux $m + k - 1$ conditions restantes. On envisagera ensuite la fonction:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\theta v + \frac{dv}{dx}\right)$$

qui satisfera à l'équation (2). Cette équation n'admettra plus les points à apparence singulière $b_1, b_2, \ldots, b_h$; car pour le point b_i, par exemple, supposons que l'on envisage le développement de u suivant les puissances croissantes de $x - b_i$. Le développement de v commencera (pour l'intégrale

générale) par un terme de degré $-\frac{1}{2}$; celui de $\frac{dv}{dx}$ par un terme de degré $-\frac{3}{2}$; celui de θ par un terme de degré -1 et de coëfficient $\mu_i = \frac{1}{2}$. Le développement de $\theta v + \frac{dv}{dx}$ devrait donc commencer par un terme de degré $-\frac{3}{2}$; mais les deux premiers termes se détruisent et il reste un terme de degré $+\frac{1}{2}$. D'un autre côté le développement de $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ commence par un terme de degré $-\frac{1}{2}$ et par conséquent celui de u par un terme de degré 0. Le point apparent b_i a donc disparu. En revanche les points $d_1, d_2, \ldots, d_{k-2}$ sont devenus des points à apparence singulière. L'équation (2) n'a donc que $k-2$ points à apparence singulière; elle est donc réduite.

Voici maintenant une méthode plus simple pour déterminer la fonction θ. On pose:

$$\theta = \sum \frac{P_i}{x - a_i} + \sum \frac{1}{2(x - b_i)} + \sum \frac{Q_i}{x - c_i}.$$

Dans cette expression entrent $2m + k = h$ indéterminées, à savoir: les k résidus P_i, les m résidus Q_i et les m infinis c_i. On les déterminera par les h conditions:

$$\theta_i = - D_i. \tag{5}$$

On peut ramener ces équations à être linéaires de la façon suivante: Soit Π le produit des $k + h$ facteurs $x - a_i$ et $x - b_i$. Posons

$$\Pi_i = \frac{\Pi}{x - b_i}, \qquad \Pi'_i = \frac{d\Pi_i}{dx}.$$

Soient π_i et π'_i ce que deviennent Π_i et Π'_i quand on y fait $x = b_i$. Posons:

$$\theta = \frac{H}{\Pi K}$$

H et K étant des polynômes de degré $m + h + k - 1$ et m en x.

Soient H_i, K_i, H'_i et K'_i ce que deviennent ces deux polynômes et leurs dérivées quand on y fait $x = b_i$. Nous aurons les relations:

$$2H_i = \pi_i K_i$$

exprimant que le résidu relatif à l'infini $x = b_i$, est égal à $\frac{1}{2}$. D'autre part les relations (5) deviennent:

$$2H'_i - K'_i\pi_i - K_i\pi'_i + 2D_i\pi_i K_i = 0.$$

Toutes ces relations sont linéaires par rapport aux coëfficients des polynômes H et K et suffisent pour les déterminer. D'où cette conclusion importante qu'il n'y a en général qu'une seule équation réduite dans une famille.

Supposons maintenant que h et k ne soient pas de même parité.

Nous poserons:

$$\psi = \frac{a(x-b_1)(x-b_2)\ \ldots\ (x-b_h)x(x-d_1)(x-d_2)\ \ldots\ (x-d_{k-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ \ldots\ (x-a_k)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\ \ldots\ (x-c_m)^2}$$

où $2m = h - k$. Nous disposerons des $m + k - 1$ indéterminées α, d et c de façon que la fonction

$$R = -\varphi_0 + \psi$$

puisse se mettre sous la forme:

$$\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}.$$

On verrait, comme dans le cas précédent, que cela est toujours possible et, en faisant à l'aide des fonctions ψ et θ la même transformation que plus haut, on arriverait à une équation (2) qui n'aurait plus d'autres points à apparence singulière que

$$0,\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{k-2}$$

et qui serait par conséquent réduite.

On peut employer la même analyse pour arriver à la réduction d'une équation linéaire:

1°. Lorsque celle-ci est d'ordre supérieur au second.

2°. Lorsque ses coëfficients sont algébriques au lieu d'être rationnels.

Puisqu'il n'y a dans une même famille qu'un nombre fini de réduites, les coëfficients numériques de l'équation réduite définissent la famille. Ce sont là les invariants dont il a été question plus haut.

§ 4. *Fonctions zétafuchsiennes.*

Soit g un groupe fuchsien quelconque que nous supposerons de la 1ère, de la 2e ou de la 6e familles. Soient:

$$Z_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_p$$

p fonctions de z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Supposons que lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, la fonction Z_i se change en

$$\Sigma a_{ik} Z_k$$

c'est à dire en une combinaison linéaire des p fonctions Z.

Les substitutions

$$(Z_i,\ \Sigma a_{ik} Z_k)$$

formeront évidemment un groupe G isomorphe à g et que nous appellerons zétafuchsien. Supposons maintenant que ces fonctions Z soient uniformes et n'aient à l'intérieur du cercle fondamental d'autre singularité que des pôles.

Lorsque le groupe g est de la 2e ou de la 6e familles son polygone générateur R_0 aura un ou plusieurs sommets sur la circonférence du cercle fondamental. Soit α l'un de ces sommets. Je supposerai que les fonctions Z n'ont dans le voisinage du point $z = \alpha$ que des singularités logarithmiques analogues à celles que présentent dans le voisinage de ce même point les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g. Entrons dans quelques détails à ce sujet: les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g sont holomorphes en e^t où $t = \frac{\beta}{z-\alpha}$ et où β est un coëfficient

convenablement choisi. (Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta mathematica, T. I, p. 215.) Dans le voisinage de ce même point singulier, les fonctions Z seront de la forme:

$$P_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2 + \ldots + P_q e^{\lambda_q t} \Phi_q$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_q$ sont holomorphes en e^t, où les λ sont des constantes et où $P_1, P_2, \ldots, P_q$ sont des polynômes entiers en t de degrés $n_1, n_2, \ldots, n_q$.

On a d'ailleurs

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p - q.$$

Lorsque toutes ces conditions sont remplies, on dit que les fonctions Z sont zétafuchsiennes.

Reprenons les équations (1) et (2) du paragraphe 1 et l'équation auxiliaire (3) de ce même paragraphe. Supposons que l'on ait choisi cette dernière équation de façon que x et y soient des fonctions fuchsiennes $f(z)$ et $f_1(z)$ du rapport z des intégrales. Supposons de plus que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières. Si nous substituons à la place de x et de y, $f(z)$ et $f_1(z)$, les intégrales de cette équation deviendront des fonctions zétafuchsiennes de z.

Cela justifie la dénomination que j'ai adoptée. On sait en effet qu'on ne peut pas obtenir toutes les intégrales elliptiques par le procédé de l'inversion, qui ne donne que les intégrales de 1ère espèce. Pour calculer les intégrales de 2de espèce, on y substitue à la place de x une fonction elliptique de z et l'intégrale cherchée devient une fonction zéta de z qui augmente d'une constante lorsque la variable s'accroît d'une période. De même ici le procédé de l'inversion ne permet d'intégrer que les équations fuchsiennes. Pour les autres équations linéaires, il faut, comme nous venons de le voir, substituer à la place de x une fonction fuchsienne de z. Les intégrales deviennent alors des fonctions zétafuchsiennes de z qui subissent une substitution linéaire lorsque la variable subit une transformation du groupe g. Les fonctions zétafuchsiennes jouent donc ici le même rôle que les fonctions zéta dans la théorie des transcendantes elliptiques.

Cela posé soient:

$$x = f(z), \quad y = f_1(z) \quad \text{et} \quad z_1, z_2, \ldots, z_{[illegible]}$$

deux fonctions fuchsiennes et un système de fonctions zétafuchsiennes admettant le groupe fuchsien g et le groupe zétafuchsien G (les fonctions x et y sont liées par une relation algébrique). Il est aisé d'en déduire une infinité de systèmes de fonctions zétafuchsiennes admettant les mêmes groupes. Soient en effet $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_q$, $q+1$ fonctions fuchsiennes admettant le groupe g. Les fonctions:

$$F_0 Z_1 + F_1 \frac{dZ_1}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_1}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_1}{dx^q},$$

$$F_0 Z_2 + F_1 \frac{dZ_2}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_2}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_2}{dx^q},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_0 Z_p + F_1 \frac{dZ_p}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_p}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_q}{dx^q},$$

formeront un système zétafuchsien.

Cherchons maintenant quelle est l'expression la plus générale d'un système zétafuchsien admettant les groupes g et G. Soit:

$$T_1, T_2, \ldots, T_p$$

un pareil système. Posons pour abréger:

$$Z_i^q = \frac{d^q Z_i}{dx^q}.$$

Considérons la matrice:

$$\| Z, Z', Z'', \ldots, Z^{p-1}, T \|.$$

Pour abréger nous n'avons écrit qu'une ligne de cette matrice; mais il faut supposer qu'elle a p lignes et que dans la i^e ligne, chacune des lettres que j'ai écrites sans indice est affectée de l'indice i. Soit maintenant $(-1)^k \Delta_{k-1}$ le déterminant que l'on obtient en supprimant dans cette matrice la k^e colonne; on aura les relations:

$$T_i = -\frac{1}{\Delta_p}(\Delta_0 Z_i + \Delta_1 Z_i' + \Delta_2 Z_i'' + \ldots + \Delta_{p-1} Z_i^{p-1}).$$

Lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, les fonctions $Z_i, Z'_i, \ldots, T_i$ subissent une même substitution S appartenant au groupe G, à savoir:

$$(Z_i, \Sigma a_{ik} Z_k), (Z'_i, \Sigma a_{ik} Z_k), \ldots, (T_i, \Sigma a_{ik} T_k).$$

Tous les déterminants $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ sont alors multipliés par un même facteur, c'est à dire par le déterminant:

$$\Sigma \pm a_{ii}.$$

Les rapports $\frac{\Delta_k}{\Delta_p}$ ne sont donc pas altérés; ce sont donc des fonctions fuchsiennes de z, c'est à dire des fonctions rationnelles de x et de y. Voici donc l'expression générale cherchée:

$$T_i = F_0 Z_i + F_1 Z'_i + F_2 Z''_i + \ldots + F_{p-1} Z_i^{p-1} \tag{4}$$

les F étant rationnels en x et y.

Les fonctions Z_i^p formant un système zétafuchsien, on aura:

$$Z_i^p + F_{p-1} Z_i^{p-1} + \ldots + F_1 Z'_i + F_0 Z_i = 0 \tag{5}$$

les F étant rationnels en x et y. Ainsi envisageons des fonctions zétafuchsiennes quelconques:

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

ayant pour groupes G et g. Considérons-les comme fonctions de $x = f(z)$, où $f(z)$ est une fonction fuchsienne admettant le groupe g.

Elles satisferont toujours à une équation linéaire à coëfficients algébriques.

Il résulte de là que les fonctions T_i satisferont comme les fonctions Z_i elles-mêmes à une pareille équation. Mais en vertu de la relation (4), l'équation à laquelle satisfait T_i et celle à laquelle satisfait Z_i appartiennent à la même espèce.

Ainsi toutes les fonctions zétafuchsiennes qui ont même groupe satisfont à des équations linéaires à coëfficients rationnels en x et en y et qui sont toutes de la même espèce.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que le déterminant

$$\Sigma \pm a_{ii}$$

de toutes les substitutions du groupe G est égal à 1. Cette hypothèse est permise. En effet on peut toujours dans une équation linéaire d'ordre p, faire disparaître le coëfficient du terme en

$$\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}$$

et si ce terme est nul, toutes les substitutions du groupe de l'équation ont leur déterminant égal à 1.

§ 5. *Développements en séries.*

Supposons d'abord que le groupe fuchsien g soit de la 1ère famille. Soit s_i une substitution de ce groupe

$$s_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Soit S_i la substitution correspondante du groupe G. Ce sera une substitution linéaire de déterminant 1 que l'on pourra représenter par le tableau de ses coëfficients:

$$\begin{vmatrix} a^i_{11} & a^i_{12} & \dots & a^i_{1p} \\ a^i_{21} & a^i_{22} & \dots & a^i_{2p} \\ . & . & . & . \\ a^i_{p1} & a^i_{p2} & \dots & a^i_{pp} \end{vmatrix}$$

La substitution S_i^{-1} sera alors représentée par le tableau:

$$\begin{vmatrix} A^i_{11} & A^i_{12} & \dots & A^i_{1p} \\ A^i_{21} & A^i_{22} & \dots & A^i_{2p} \\ . & . & . & . \\ A^i_{p1} & A^i_{p2} & \dots & A^i_{pp} \end{vmatrix}$$

où les A sont les mineurs du déterminant des a.

Nous allons considérer p fonctions rationnelles

$$H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_p$$

et p séries:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_p$$

et nous adopterons les notations suivantes:

$$zs_i = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

$$H_\mu S_i = \sum a^i_{\mu\nu} H_\nu$$

$$\xi_\mu S_i = \sum a^i_{\mu\nu} \xi_\nu .$$

Les séries ξ s'écriront alors

$$(1) \qquad \xi_\mu(z) = \sum_i [H_\mu(zs_i)]\, S_i^{-1} \left[\frac{d(zs_i)}{dz}\right]^m .$$

Supposons que l'on ait démontré que ces séries sont absolument convergentes; voyons quelles seront leurs propriétés. On aura:

$$\xi_\mu(z) = \sum_i [H_\mu(zs_k s_i)]\, S_i^{-1} S_k^{-1} \left[\frac{d(zs_k s_i)}{dz}\right]^m$$

et de plus:

$$\xi_\mu(zs_k) = \sum_i [H_\mu(zs_k s_i)]\, S_i^{-1} \left[\frac{d(zs_k s_i)}{d(zs_k)}\right]^m$$

d'où:

$$[\xi_\mu(z)]\, S_k = \sum [H_\mu(zs_k s_i)]\, S_i^{-1} \left[\frac{d(zs_k s_i)}{dz}\right]^m$$

et enfin:

$$(2) \qquad \xi_\mu(zs_k) = [\xi_\mu(z)]\, S_k \left[\frac{dz}{d(zs_k)}\right]^m .$$

Ecrivons la série (1) et la relation (2) avec les notations ordinaires, il vient:

$$\xi_\mu = \sum_i \sum_\nu A^i_{\mu\nu} H_\nu \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

et

$$\xi_\mu\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \sum_\nu a^k_{\mu\nu} \xi_\nu(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

Il reste à rechercher si les séries (1) sont absolument convergentes. Pour cela envisageons la série

$$\lambda_{\mu\nu} = \sum_i \operatorname{mod}\left[A^i_{\mu\nu}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}\right]$$

et cherchons pour quelles valeurs de m cette série est convergente.

Nous allons donc chercher avec quelle rapidité croissent les coëfficients $A^i_{\mu\nu}$. A cet effet envisageons les substitutions fondamentales du groupe G et leurs inverses. Si k est le nombre des substitutions fondamentales, nous aurons en tout $2kp^2$ coëfficients. Soit M le plus grand module de ces $2kp^2$ coëfficients.

Soit maintenant S_i une substitution quelconque du groupe G dont tous les coëfficients aient leurs modules plus petits que N; soit d'ailleurs Σ une des substitutions fondamentales on une de leurs inverses. Les modules de tous les coëfficients de $S_i\Sigma$ seront plus petits que pMN; car chacun de ces coefficients est une somme de p monomes et chacun de ces monomes est le produit d'un coëfficient de S_i par un coëfficient de Σ.

Cela posé, une substitution S_i quelconque pourra toujours se mettre sous la forme suivante:

$$S_i = \Sigma_1^{\alpha_1}\Sigma_2^{\alpha_2}\ldots\Sigma_p^{\alpha_p}. \tag{3}$$

Chacune des lettres $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ désigne une des substitutions fondamentales ou une de leurs inverses, la même substitution pouvant d'ailleurs se retrouver plusieurs fois dans la suite. Les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont entiers positifs. La somme $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ s'appelle *l'exposant* de la substitution. Dans le cas où la substitution S_i peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme (3), son exposant est la plus petite valeur que puisse prendre la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$.

Il résulte de cette définition que les modules des coëfficients d'une substitution dont l'exposant est σ sont plus petits que

$$(Mp)^\sigma.$$

Le groupe G est isomorphe au groupe g. Il en résulte que l'exposant de S_i est le même que celui de la substitution correspondante s_i

du groupe g si l'isomorphisme est holoèdrique. Il est plus petit, en général, si l'isomorphisme est mériédrique. Dans tous les cas il ne peut pas être plus grand.

Soit d'un autre côté R la distance à l'origine d'un transformé zs_i du point z, distance évaluée au point de vue de la géométrie non-euclidienne; je veux dire que R est la L de la droite $o\text{-}zs_i$. On peut trouver une relation entre R et l'exposant σ de la substitution s_i que nous appellerons aussi pour abréger l'exposant du point zs_i. En effet supposons pour fixer les idées que les points z et o soient tous deux intérieurs au polygone R_0. La droite $zs_i\text{-}o$ dont la L est égale à R traversera un certain nombre de polygones $R_0, R_1, \ldots, R_i$ et σ sera au plus égal au nombre n de ces polygones. Quelle relation y aura-t-il maintenant entre R et n.

Considérons d'abord le polygone R_0; la L de tout arc de courbe joignant deux points du périmètre de ce polygone appartenant à deux côtés non adjacents sera plus grande qu'une certaine limite inférieure que j'appellerai λ. Considérons maintenant un polygone R_1 adjacent à R_0 le long d'un côte C_1 et envisageons un arc de courbe joignant un point d'un côté C_0 de R_0 à un point du côté C_2 de R_1 et traversant le côté C_1. Je supposerai de plus que ces trois côtés C_0, C_1, C_2 n'ont aucun point commun. (Cf. *Théorie des groupes fuchsiens,* Acta mathematica, T. 1, page 31.) La L d'un pareil arc restera toujours plus grande qu'une certaine limite inférieure que j'appellerai μ.

Considérons enfin un arc de courbe qui vient couper successivement divers côtés de divers polygônes R_i et de façon que tous ces côtés viennent converger en un même point. Ce point sera un sommet de l'un des polygones et comme le groupe g est supposé de la 1ère famille, ce sera un sommet de la 1ère catégorie auquel ne viendra aboutir qu'un nombre *fini* de côtés. J'appellerai h la limite supérieure que ce nombre fini ne pourra dépasser. On aura alors:

$$n < R\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{\mu}\right)$$

inégalité que nous pourrons écrire:

$$n < \alpha R \quad \text{ou} \quad \sigma < \alpha R$$

α étant une constante.

Mais si l'on se reporte au paragraphe 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (Acta mathematica, T. 1), on verra que l'on a (K étant une constante)

$$\mathrm{mod}\,(\gamma_i z + \delta_i)^{-2} < \frac{K}{e^{2R} + e^{-2R} + 2} < Ke^{-2R}$$

et de plus que la série $\sum \mathrm{mod}\,(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$ est convergente.

On a d'ailleurs, d'après ce que nous venons de voir:

$$\mathrm{mod}\, A^i_{\mu\nu} < (Mp)^\sigma < e^{R\alpha \log (Mp)}.$$

On peut donc prendre m assez grand pour que:

$$2m - 4 > \alpha \log (Mp)$$

d'où:

$$\mathrm{mod}\, A^i_{\mu\nu} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} < \mathrm{mod}\,(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

et par conséquent pour que la série $\lambda_{\mu\nu}$ définie plus haut soit convergente. La limite que l'on est ainsi conduit à attribuer au nombre m n'est pas précise. Reprenons maintenant les séries (1); on peut trouver une limite supérieure du module des p fonctions:

$$H_\mu(zs_i)$$

pourvu qu'aucune d'elles ne devienne infinie sur le cercle fondamental. (Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* § 1, Acta mathematica T. 1.) Les séries (1) sont donc absolument convergentes.

C. Q. F. D.

La relation (2) montre ensuite que si l'on divise les p fonctions $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ par une même fonction thétafuchsienne θ, les quotients

$$Z_1 = \frac{\xi_1}{\theta}, \quad Z_2 = \frac{\xi_2}{\theta}, \quad \dots, \quad Z_p = \frac{\xi_p}{\theta}$$

forment un système zétafuchsien.

D'où la conclusion suivante: Avec un groupe fuchsien g de la 1ère famille et un groupe zétafuchsien G isomorphe au premier, on peut toujours construire une infinité de systèmes zétafuchsiens.

Donc on peut toujours construire une infinité d'équations linéaires admettant un groupe donné, pourvu que ce groupe soit isomorphe à un groupe fuchsien de la 1ère famille.

Cette remarque est importante au point de vue de l'intégration algébrique de ces équations. Les savants qui ont abordé jusqu'ici la question de cette intégration algébrique ont cherché à former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Il restait à savoir s'il existait des équations admettant ces groupes. Cette question est maintenant résolue, puisque tout groupe d'ordre fini peut toujours être regardé comme isomorphe à un groupe fuchsien de la 1ère famille.

Qu'arrive-t-il lorsque le groupe G est d'ordre fini? Il est mériédriquement isomorphe au groupe g; si dans ce groupe g on distingue les substitutions auxquelles correspond dans le groupe G la substitution identique, ces substitutions formeront un sous-groupe g' contenu dans g. Les fonctions $x = f(z)$ et $y = f_1(z)$ et, en général, les fonctions fuchsiennes de groupe g, pourront être regardées comme des cas particuliers des fonctions fuchsiennes de groupe g'. D'un autre côté, les séries $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ se réduisent à des séries thétafuchsiennes de groupe g', et les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ à des fonctions fuchsiennes de groupe g'. Il y a donc une relation algébrique entre Z_i et x. L'intégrabilité algébrique des équations linéaires auxquelles satisfont les fonctions Z_i est donc mise en évidence.

Nous pouvons dès à présent indiquer l'expression analytique générale des fonctions zétafuchsiennes. Nous avons vu en effet que si

$$Z_1^h, \ Z_2^h, \ \ldots, \ Z_p^h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

sont p systèmes zétafuchsiens et si

$$T_1, \ T_2, \ \ldots, \ T_p$$

représentent un système zétafuchsien quelconque, on a

$$T_n = F_1 Z_n^1 + F_2 Z_n^2 + \ldots + F_p Z_n^p$$

$F_1, F_2, \ldots, F_p$ étant des fonctions fuchsiennes que l'on peut toujours considérer comme le quotient de deux séries thétafuchsiennes. Voici par conséquent quelle est la forme générale de la fonction T_n.

Soient

$$\xi_\mu^1, \xi_\mu^2, \ldots, \xi_\mu^p$$

$$\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$$

p séries de la forme (1) et $p+1$ séries thétafuchsiennes, on aura

$$T_\mu = \frac{\theta_1 \xi_\mu^1 + \theta_2 \xi_\mu^2 + \ldots + \theta_p \xi_\mu^p}{\theta}.$$

Parmi les séries ξ on peut en envisager qui sont plus simples que les autres. En effet dans les p séries:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$$

entrent p fonctions rationnelles arbitraires:

$$H_1, H_2, \ldots, H_p.$$

Supposons que toutes les fonctions H soient nulles, excepté H_ν, la série ξ_μ se réduira à

$$\xi_{\mu\nu} = \sum_i H_\nu \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) A^i_{\mu\nu} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Les séries de cette forme où $p - 1$ des fonctions arbitraires H sont nulles peuvent s'appeler séries ξ simples.

Choisissons maintenant p fonctions H quelconques et formons un système de séries ξ_μ à l'aide de ces p fonctions. Formons ensuite avec chacune de ces p fonctions, avec H_ν par exemple, un système de séries simples $\xi_{\mu\nu}$, les $p - 1$ autres fonctions étant supposées nulles, on aura:

$$\xi_\mu = \xi_{\mu 1} + \xi_{\mu 2} + \ldots + \xi_{\mu p}$$

ce qui montre qu'une série ξ quelconque peut être regardée comme une somme de séries simples.

Voyons maintenant quelle est l'expression analytique des séries ξ au moyen des intégrales d'une équation différentielle linéaire, donnant naissance à un système de fonctions zétafuchsiennes. D'abord, afin d'éviter des complications inutiles et qui ne tiennent pas au fond des choses, je

supposerai que le groupe g est non-seulement de la 1ère famille, mais encore du genre 0. Le système zétafuchsien considéré:

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

regardé comme fonction de la transcendante fuchsienne $x = f(z)$ satisfera à l'équation:

$$\frac{d^p Z}{dx^p} + \sum \varphi_k \frac{d^k Z}{dx_k} = 0 \tag{4}$$

où les coëfficients φ_k sont rationnels en x seulement. Je supposerai pour simplifier que cette équation (4) soit du 2d ordre et qu'elle soit *réduite* au sens donné à ce mot au paragraphe 3 de ce mémoire. Je l'écrirai:

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \varphi_2 Z = 0. \tag{4}$$

Les infinis de φ_2, c'est à dire les points singuliers, seront $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et ∞. Je supposerai qu'il n'y a pas de points à apparence singulière ou plutôt s'il y en a, je les regarderai comme des points singuliers ordinaires et je les ferai correspondre à un sommet de R_0. J'appellerai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ les sommets de R_0 qui correspondront aux $n + 1$ points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$. J'appellerai $\frac{2\pi}{\beta_i}$, comme dans le paragraphe 5 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* la somme des angles du cycle dont fait partie le sommet α_i. Les racines γ_i et $1 - \gamma_i$ de l'équation déterminante relative à $x = a_i$ et à l'équation différentielle (4) devront être des multiples de $\frac{1}{\beta_i}$. Les intégrales Z_1 et Z_2 de l'équation (4), regardées comme fonctions de z, seront infinies d'ordre $(\gamma_i - 1)\beta_i$ pour $z = \alpha_i$. Leurs dérivées $Z_1' = \frac{dZ_1}{dx}$ et $Z_2' = \frac{dZ_2}{dx}$ seront infinies d'ordre $\gamma_i \beta_i$. Voici maintenant quelle est l'expression générale d'une série ξ quelconque:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m [F(x) Z_1 + F_1(x) Z_1'] = \xi_1 \tag{5}$$

$F(x)$ et $F_1(x)$ étant des fonctions rationnelles de x.

Nous allons chercher si l'on peut déterminer ces deux fonctions rationnelles de telle façon que l'expression (5) et l'expression conjuguée

$$(5') \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m (FZ_2 + F_1 Z_2') = \xi_2$$

ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

Si l'on a, comme nous pouvons le supposer puisque le coëfficient de $\frac{dZ}{dx}$ est nul dans l'équation (4):

$$Z_1 Z_2' - Z_2 Z_1' = 1,$$

il vient

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F = \xi_1 Z_2' - \xi_2 Z_1'$$

et

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F_1 = \xi_1 Z_2 - \xi_2 Z_1.$$

Il suit de là que les deux fonctions F et F_1 ne peuvent devenir infinies que pour les points singuliers $z = \alpha_i$, la première d'ordre $(\gamma_i + m)\beta_i - m$ au plus (en z) et la seconde d'ordre $(\gamma_i + m - 1)\beta_i - m$ au plus.

On aura donc

$$F = \frac{\theta(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2} \ldots (x-a_n)^{\lambda_n}}$$

et

$$F_1 = \frac{\theta(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1-1}(x-a_2)^{\lambda_2-1} \ldots (x-a_n)^{\lambda_n-1}}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les plus grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités:

$$(6) \qquad \lambda_i \leq \gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i}$$

et où θ et θ_1 sont des polynômes entiers en x qu'il s'agit maintenant de déterminer plus complètement.

Nous venons de voir que F ne pouvait devenir pour $x = a_i$ infini d'un ordre plus grand que λ_i et que F_1 ne pouvait devenir infini d'un ordre plus grand que $\lambda_i - 1$.

Cherchons maintenant un nombre μ_i tel que si F est infini d'ordre μ_i et F_1 infini d'ordre $\mu_i - 1$ pour $x = a$, ξ_1 et ξ_2 soient certainement finis.

Il arrive alors que $FZ_1\left(\frac{dx}{dz}\right)^m$ et $F_1 Z_1'\left(\frac{dx}{dz}\right)^m$ deviennent infinis d'ordre:

$$\mu_i + \gamma_i - 1 - m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)$$

d'où il résulte que μ_i est le plus grand nombre entier satisfaisant à l'inégalité:

$$\mu_i \leqq 1 - \gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i}.$$

Pour $x = \infty$, $\frac{dx}{dz}$ devient infini d'ordre $1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}$, Z_1 d'ordre γ_{n+1} et Z_1' d'ordre $\gamma_{n+1} - 1$. Il en résulte que F ne peut pas être infini d'ordre plus élevé que:

$$\lambda_{n+1} \leqq - m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - 1$$

et F_1 d'ordre plus élevé que $\lambda_{n+1} + 1$.

D'autre part si F est infini d'ordre μ_{n+1} et F_1 d'ordre $\mu_{n+1} + 1$, ξ_1 et ξ_2 seront au plus d'ordre:

$$\mu_{n+1} + \gamma_{n+1} + m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

de sorte que si μ_{n+1} satisfait à l'inégalité:

$$\mu_{n+1} \leqq - m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) - \gamma_{n+1}$$

on sera certain que ξ_1 et ξ_2 sont finis.

Posons maintenant

$$F = f\varphi, \qquad F_1 = f_1\varphi_1$$

f, φ, f_1, φ_1 étant des fonctions rationnelles devenant infinies respectivement d'ordre μ_i, $\lambda_i - \mu_i$, $\mu_i - 1$, $\lambda_i - \mu_i$ pour $x = a_i$ et d'ordre μ_{n+1},

$\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$, $\mu_{n+1} + 1$, $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$ pour $x = \infty$. Pour que cette décomposition ne puisse pas se faire d'une infinité de manières, nous supposerons qu'un coëfficient quelconque de f et un de f_1 sont assujettis à avoir une valeur donnée.

Voici alors le nombre des coëfficients restés arbitraires:

$$\text{dans } f, \qquad \Sigma\mu_i$$

$$\text{dans } f_1, \qquad \Sigma\mu_i + 1 - n$$

$$\text{dans } \varphi \text{ et dans } \varphi_1, \qquad \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + 1$$

en tout

$$2\Sigma\lambda_i + 3 - n.$$

Mais entre ces coëfficients, il y a certaines relations dont il faut chercher le nombre. Considérons un quelconque des infinis a_i, posons pour abréger $a_i = 0$ et supprimons partout l'indice i. Soit:

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi = Ax^{\mu-\lambda} + A^1x^{\mu-\lambda+1} + A^2x^{\mu-\lambda+2} + \ldots + A^{\lambda-\mu-1}x^{-1} + \varphi' \\ \varphi_1 = A_1x^{\mu-\lambda} + A_1^1x^{\mu-\lambda+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_1^{\lambda-\mu-1}x^{-1} + \varphi_1' \end{cases}$$

φ' et φ_1' étant finis pour $x = 0$. On peut maintenant toujours supposer que Z_1 et Z_2 aient été choisis de manière à être respectivement infinis d'ordre $(\gamma - 1)$ et $-\gamma$ pour $x = 0$, car si cela n'était pas il suffirait de remplacer Z_1 et Z_2 par $\alpha Z_1 + \beta Z_2$ et $\gamma Z_1 + \delta Z_2$, α, β, γ et δ étant des coëfficients convenablement choisis. Cela posé, imaginons qu'il n'y ait aucune relation entre les coëfficients A des expressions (7), l'expression (5) sera infinie d'ordre:

$$(8) \qquad \lambda - m\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \gamma - 1$$

et l'expression (5') d'ordre:

$$\lambda - m\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma.$$

L'expression (5') est donc finie en vertu de l'inégalité (6). Mais pour que l'expression (5) soit finie, il faut qu'il y ait entre les coëfficients

A des expressions (7), des relations dont le nombre est précisément le plus petit entier qui est égal ou supérieur à l'expression (8), c'est à dire $\lambda - \mu$.

Le même raisonnement s'appliquerait pour $x = \infty$ et on trouverait qu'on doit avoir entre les coëfficients de φ et φ_1 $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$ relations pour que (5) et (5') restent finis pour $x = \infty$. Il y a donc en tout

$$\Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i$$

relations et il reste:

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

coëfficients arbitraires. Dans cette expression $\Sigma\lambda_i$ signifie

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1}.$$

Ainsi toutes les séries qui ne deviennent pas infinies, s'expriment linéairement à l'aide de:

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

d'entre elles. On trouverait un résultat analogue pour le cas de $p > 2$.

Nous devons adjoindre au groupe zétafuchsien G, le groupe zétafuchsien corrélatif G_1 défini de la façon suivante; soit:

$$(Z_i, \ \Sigma a_{ik} Z_k)$$

une substitution correspondante de G, la substitution correspondante de G_1 sera:

$$(\Sigma a_{ki} T_k, \ T_i)$$

en appelant

$$T_1, \ T_2, \ldots, \ T_i$$

l'un des systèmes zétafuchsiens engendrés par le groupe G_1. On sait que dans la théorie des formes algebriques et en particulier dans celle des formes appelées *contravariants* et *mixed-concomitants*, la considération de la substitution corrélative d'une substitution linéaire donnée joue un rôle fort important.

Considérons maintenant l'expression suivante

$$(9) \qquad Z_1 T_1 + Z_2 T_2 + \ldots + Z_p T_p .$$

Quand la variable z subit une substitution du groupe fuchsien g, les Z_i subissent la substitution correspondante de G et les T_i subissent la substitution correspondante de G_1. Il en résulte que l'expression (9) elle-même demeure invariable. C'est donc une fonction fuchsienne de z.

On verra plus loin le rôle des fonctions zétafuchsiennes et surtout des séries ξ engendrées par le groupe corrélatif G_1.

Remarquons maintenant que dans le cas particulier de $p = 2$, à la substitution:

$$S_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

du groupe G, correspond la substitution

$$\begin{vmatrix} d_i & -c_i \\ -b_i & a_i \end{vmatrix}$$

du groupe G_1. Ces deux substitutions ont évidemment mêmes multiplicateurs, d'où il suit que les quantités que nous avons appelées plus haut

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$$

sont les mêmes pour les deux groupes G et G_1.

Supposons maintenant $p > 2$; si $x = a$ est un point singulier pour lequel l'équation déterminante relative à une équation (4) engendrée par le groupe G, ait pour racines:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$$

l'équation déterminante relative à l'une des équations (4) engendrées par le groupe G_1 aura pour racines:

$$\sum\varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{p(p-1)}{2}, \quad \sum\varepsilon - \varepsilon_2 - \frac{p(p-1)}{2}, \quad \ldots, \quad \sum\varepsilon - \varepsilon_p - \frac{p(p-1)}{2}.$$

§ 6. *Décomposition en éléments simples.*

Soit

(1) $$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

un système zétafuchsien que je supposerai de la 1ère famille, comme dans le paragraphe précédent. Soit $f(z)$ une fonction fuchsienne de la 1ère famille ayant même groupe fuchsien que ce système. Je supposerai, pour fixer les idées, que cette fonction est de genre 0 et que toutes les autres transcendantes fuchsiennes de même groupe en sont des fonctions rationnelles.

Je vais reprendre les notations du § 5 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (Acta mathematica, T. 1, p. 240).

Considérons l'intégrale:

(2) $$\int \frac{Z_i(z)}{z-x}\left(\frac{df(z)}{dz}\right)^{-h} dz$$

prise le long du contour S défini à la dite page 240. Je dis que cette intégrale tend vers 0 quand r tend vers 1, pourvu que h soit suffisamment grand.

En effet nous pourrons aisément trouver une limite supérieure M_1 du module de $\frac{1}{z-x}$. Supposons maintenant que le module de $\frac{df}{dz}$ reste inférieur à M_2 le long du périmètre de R_0; il restera inférieur à:

$$M_2 H^{2h}$$

le long du périmètre de S. Supposons enfin que le long du périmètre de R_0, les modules des p fonctions:

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

restent inférieurs à M_3. Cherchons la limite supérieure du module de ces mêmes fonctions le long du périmètre du polygone R_i en supposant que la substitution s_i qui change R_0 en R_i soit d'exposant σ. Soit S_i la

substitution de G qui correspond à s_i. Nous avons vu au paragraphe précédent que les coëfficients de S_i sont plus petits que

$$e^{a\sigma}$$

a étant une constante convenablement choisie. Donc le long de R_i le module des p fonctions Z est plus petit que:

$$pM_3e^{a\sigma}.$$

Considérons en particulier les polygones R_i qui forment la bordure de S. Leur exposant est, d'après le paragraphe précédent, plus petit que $\frac{b}{a}(R+\lambda)$ où b est une constante convenablement choisie. D'où ce résultat:

$$\operatorname{mod} Z_i < pM_3e^{b(R+\lambda)}$$

le long de S. La quantité sous le signe $\int$ a donc son module plus petit que

$$(3) \qquad pM_1M_2M_3e^{b(R+\lambda)}H^{2h}.$$

Si l'on se reporte à la valeur de H (*Fonctions fuchsiennes,* Acta mathematica, T. 1, p. 241) on verra que cette expression (3) tend vers 0 pourvu que

$$b < 4h.$$

L'intégrale (2) tend donc aussi vers 0, d'où l'on peut conclure que les p fonctions

$$(4) \qquad Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$$

peuvent se développer en séries de la façon suivante:

$$(5) \qquad \sum\frac{A}{z-a}+\sum\frac{A_2}{(z-a)^2}+\ldots+\sum\frac{A_m}{(z-a)^m}$$

où les a sont les infinis et les A les résidus. Si la fonction n'admet que des infinis simples, cette série se réduit à

$$\sum\frac{A}{z-a}.$$

Quand on connaîtra les infinis et les résidus de ces p fonctions à l'intérieur de R_0, on connaîtra tous les infinis et tous les résidus de ces mêmes fonctions et par conséquent la série (5). Supposons que a soit un infini des fonctions (4) situé à l'intérieur de R_0 et que nous supposerons simple pour fixer les idées. Soient:

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

les résidus des p fonctions (4) correspondant à cet infini.

Les points:

$$as_i = \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}$$

seront aussi des infinis simples de ces mêmes fonctions (4).

Nous écrirons comme plus haut:

$$A_\mu S_i = \Sigma a_{\mu\rho} A_\rho$$

si la substitution S_i s'écrit:

$$(Z_\mu, \Sigma a_{\mu\rho} Z_\rho).$$

Or nous avons

$$Z_\mu(zs_i) = [Z_\mu(z)] S_i = \Sigma a_{\mu\rho} Z_\rho(z)$$

et

$$Z_\mu(zs_i)\left[\frac{df(zs_i)}{d(zs_i)}\right]^{-h} = \left[\sum a_{\mu\rho} Z_\rho(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}\right]\left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^h.$$

Multiplions l'identité précédente par $z - a$ et faisons $z = a$, il viendra, en appelant

$$A'_1, A'_2, \ldots, A'_p$$

les résidus des p fonctions (4) pour $z = as_i$

$$(\gamma_i a + \delta_i)^2 A'_\mu = \Sigma a'_{\mu\rho} A_\rho (\gamma_i a + \delta_i)^{-2h}$$

d'où

$$A'_\mu = (A_\mu S_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{-2h-2}.$$

Telle est la valeur des résidus cherchés. Réunissons ensemble les termes de la série (5) qui correspondent aux infinis de la forme as_i; nous trouverons la série suivante:

$$(6) \qquad \Phi_\mu(z,\ a) = \sum \frac{(A_\mu S_i)}{(z - as_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}},$$

de sorte que chaque fonction (4) se trouve décomposée en une somme d'un nombre fini d'éléments simples de la forme $\Phi_\mu(z,\ a)$.

Mais on peut pousser plus loin encore cette décomposition en éléments simples.

L'identité (6) pourra en effet s'écrire:

$$\Phi_\mu = \sum_\nu \sum_i \frac{a^i_{\mu\nu} A_\nu}{(z - as_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}}$$

ou encore:

$$\Phi_\mu = A_1 \Phi_{\mu 1} + A_2 \Phi_{\mu 2} + \ldots + A_p \Phi_{\mu p}$$

en posant

$$\Phi_{\mu\nu} = \sum_i \frac{a^i_{\mu\nu}}{(z - as_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}}$$

de sorte que si les fonctions (4) admettent les infinis simples

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_q$$

à l'intérieur de R_0, et si elles admettent l'infini z_k respectivement avec les résidus:

$$B_{k1},\ B_{k2},\ \ldots,\ B_{kp}$$

il viendra pour la μ^e des fonctions (4) l'identité:

$$Z_\mu(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h} = \sum_k \sum_\nu B_{k\nu} \Phi_{\mu\nu}(z,\ z_k)$$

qui nous montre cette fonction décomposée en éléments simples. On arriverait à un résultat analogue pour les cas où cette fonction admettrait des infinis multiples.

Voyons ce que sont ces éléments simples et pour cela regardons dans l'expression $\Phi_{\mu\nu}(z, a)$ z comme une constante et a comme la variable.

Cherchons maintenant à former les séries ξ simples du paragraphe précédent avec le groupe G_1 corrélatif de G de ce même paragraphe, a étant toujours la variable; nous trouverons:

$$\xi_{\mu\nu} = \sum_i H_\nu(as_i) a^i_{\nu\mu} (\gamma_i a + \delta)^{-2m}$$

ou en faisant:

$$H_\nu(a) = \frac{1}{z_\nu - a}, \qquad m = h + 1$$

il viendra

$$\xi_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu}(z, a).$$

Ainsi la transcendante $\Phi_{\nu\mu}$ regardée comme fonction de a est une fonction ξ admettant le groupe G_1 corrélatif de G.

Nous allons supposer maintenant $p = 2$ pour fixer les idées et nous allons étudier de plus près la décomposition en éléments simples des fonctions:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} (FZ_1 + F_1 Z_1') = A_1$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} (FZ_2 + F_1 Z_2') = A_2$$

Z_1, Z_2, Z_1', Z_2' ayant la même signification qu'à la fin du paragraphe précédent et F et F_1 désignant des fonctions rationnelles en x. Il est clair que A_1 et A_2 sont des fonctions de la forme (4) auxquelles, par conséquent, on peut appliquer tout ce que nous venons de dire.

Dans ce qui va suivre, les lettres β_i, γ_i, λ_i, μ_i auront la même signification qu'à la fin du paragraphe précédent, et nous poserons:

$$m = h + 1.$$

Cherchons la condition pour que les fonctions A_1 et A_2 ne deviennent pas infinies pour $x = a_i$. Il faut que F et F_1 deviennent nuls d'un ordre suffisamment grand et c'est cet ordre qu'il s'agit d'abord de déterminer. Supposons pour le faire plus aisément que Z_1 et Z_2 soient respectivement

infinies d'ordre $\gamma_i - 1$ et $-\gamma_i$; cela est toujours possible, car si cela n'était pas, on remplacerait Z_1 et Z_2 par $\alpha Z_1 + \beta Z_2$ et $\gamma Z_1 + \delta Z_2$, α, β, γ, δ étant des coëfficients convenablement choisis. Si alors F devient nul d'ordre δ_i et F_1 d'ordre $\delta_i + 1$, A_1 et A_2 seront respectivement infinies d'ordre:

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i$$

et

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) - \gamma_i - \delta_i.$$

On doit donc avoir d'abord:

$$\delta_i \geqq h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) - \gamma_i$$

ou ce qui revient au même

$$\delta_i \geqq \mu_i - 1.$$

Cette condition est suffisante pour que A_2 ne devienne pas infini. Pour que A_1 reste également fini, il faut encore qu'il y ait certaines relations entre les coëfficients de F et de F_1.

Supposons maintenant que F et F_1 deviennent nuls d'ordre δ_{n+1} et $\delta_{n+1} - 1$ pour $x = \infty$ et Z_1 et Z_2 infinis d'ordre γ_{n+1} et $1 - \gamma_{n+1}$. Il en résultera que A_1 et A_2 deviendront infinis d'ordre:

$$-h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}$$

et

$$-h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + 1 - \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}.$$

Par conséquent A_2 reste fini pourvu que

$$\delta_{n+1} \geqq 1 - \gamma_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

ou ce qui revient au même:

$$\delta_{n+1} \geqq \mu_{n+1} + 3.$$

Si en outre il y a certaines relations entre les coëfficients de F et de F_1, A restera fini. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que δ_i et δ_{n+1} sont égaux à leurs limites, c'est à dire que l'on a

$$\delta_i = \mu_i - 1$$

$$\delta_{n+1} = \mu_{n+1} + 3.$$

Considérons maintenant les relations dont il vient d'être question et qui doivent exister entre les coëfficients de F et de F_1 pourvu que les deux fonctions A restent finies pour $z = \alpha_i$ et pour $z = \alpha_{n+1}$ et avant tout, cherchons quel en est le nombre.

Si F et F_1 étaient des fonctions rationnelles quelconques assujetties seulement à être nulles d'ordre

$$\delta_i \text{ et } \delta_i + 1 \quad (\text{ou } \delta_{n+1} \text{ et } \delta_{n+1} - 1 \quad \text{pour} \quad z = \alpha_{n+1})$$

A_1 serait infini d'ordre

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i} + \gamma_i - 1 - \delta_i\right) \qquad \left(\text{ou} \quad -h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}\right).$$

Dans le développement de A_1 suivant les puissances croissantes de $x - a_i$, il y aurait donc

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i\right]$$

$$\left(\text{ou} \quad E'\left[\gamma_{n+1} - \delta_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right] \quad \text{pour} \quad z = \alpha_{n+1}\right)$$

termes infinis. Nous désignons par $E'(x)$ le plus petit entier satisfaisant à la condition

$$E'(x) \geqq x$$

et par $E(x)$ le plus grand entier tel que

$$E(x) \leqq x.$$

Le nombre des relations nécessaires pour que les deux A restent finis pour $z = \alpha_i$ est donc égal à:

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i\right]$$

ou bien

$$E'\left[h\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right)+\gamma_i-1\right]-\delta_i$$

ou, ainsi qu'il est aisé de le voir:

$$\lambda_i - 1 - \delta_i = \lambda_i - \mu_i .$$

En ce qui concerne le point $z = \alpha_{n+1}$, le nombre des relations est égal à:

$$E'\left[\gamma_{n+1}-\delta_{n+1}-h\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]$$

ou

$$E'\left[\gamma_{n+1}-h\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]-\delta_{n+1}$$

ou enfin

$$\lambda_{n+1}+3-\delta_{n+1}=\lambda_{n+1}-\mu_{n+1} .$$

On a en effet

$$\lambda_i = E\left[\gamma_i+(h+1)\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right)\right]$$

$$\lambda_{n+1} = E\left[\gamma_{n+1}-1-(h+1)\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]$$

$$E'(x) = -E(-x), \qquad E(x+1)=E(x)+1$$

$$E\left(\frac{a-1}{b}\right)+E\left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

a et b étant des entiers.

Le nombre total des relations est donc ainsi de:

$$\Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i .$$

Considérons maintenant les diverses fonctions A qui admettent q infinis simples donnés sans en admettre d'autres. Toutes ces fonctions s'exprimeront linéairement à l'aide d'un certain nombre d'entre elles. Quel est ce nombre? Les fonctions F et F_1 admettent les q infinis donnés; mais comme elles doivent être nulles respectivement d'ordre δ_{n+1}

et d'ordre $\delta_{n+1} - 1$ pour $x = \infty$, elles admettront $q - \delta_{n+1}$ et $q - \delta_{n+1} + 1$ zéros. Mais la fonction F admet δ_i fois le zéro α_i et la fonction F_1 l'admet $\delta_i + 1$ fois; il reste donc

$$q - \Sigma\delta \quad \text{zéros arbitraires dans } F$$

et

$$q - \Sigma\delta + 1 - n \quad \text{dans } F_1.$$

Il y a donc en tout dans F et F_1

$$2q - 2\Sigma\delta + 3 - n = 2q - 2\Sigma\mu_i + n - 3$$

coëfficients arbitraires.

Mais nous n'avons pas tenu compte des relations qui doivent exister entre les coëfficients de F et de F_1 et dont nous venons de déterminer le nombre. Il faut donc retrancher de l'expression qui précède le nombre de ces relations, c'est à dire

$$\Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i.$$

Il restera ainsi:

$$Q = 2q - \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + n - 3$$

coëfficients réellement arbitraires.

Ainsi toutes les fonctions A qui admettent les q infinis donnés s'expriment linéairement à l'aide de Q d'entre elles.

Dans toute décomposition en éléments simples, il y a un nombre que l'on peut appeler fondamental et qui joue un rôle très important. Supposons qu'il s'agisse de décomposer en éléments simples les fonctions qui appartiennent à une certaine catégorie C. On doit supposer que la somme de deux fonctions appartenant à cette catégorie C, appartient également à C; ce n'est que dans ces conditions qu'on peut être conduit à chercher une décomposition en éléments simples. Il peut arriver que les éléments simples fassent eux-mêmes partie de C; c'èst ainsi que dans la décomposition des fractions rationnelles, on est conduit à des éléments de la forme $\frac{A}{x - a}$ qui sont eux-mêmes des fractions rationnelles. Dans ce cas, nous dirons que le nombre fondamental est égal à 0. Mais le contraire peut arriver également. Ainsi dans la décomposition des fonctions doublement périodiques, les éléments simples sont de la forme

$A\frac{d}{dx}\log\theta(x-a)$ et ne sont pas des fonctions doublement périodiques. Mais il existe des fonctions doublement périodiques qui sont des sommes de deux éléments simples seulement, et à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement. Dans ce cas, le nombre fondamental sera égal à 1. En général s'il existe des fonctions de la catégorie C, décomposables en $m+1$ éléments simples seulement et à l'aide desquelles toutes les autres fonctions de la catégorie C peuvent s'exprimer linéairement, le nombre fondamental sera égal à m, pourvu que m soit le plus petit nombre jouissant de cette propriété. Ainsi dans la décomposition des fonctions rationnelles de x et de y, (y étant lié à x par une relation algébrique $\varphi(x, y) = 0$) décomposition découverte par M. Roch, le nombre fondamental est égal au genre de la relation $\varphi = 0$.

Envisageons de même la décomposition de la fonction $A(z)$ que nous avons considérée aux pages 238, 266, 275 et 284 du *mémoire sur les fonctions fuchsiennes* en éléments simples de la forme:

$$A_k\Phi(z, z_k). \text{ (}^1\text{)}$$

Dans le mémoire cité, nous avons déterminé le nombre fondamental relatif à cette décomposition. C'est ainsi que dans le cas du genre 0 et de la 2e famille (loco citato p. 276) nous avons trouvé pour ce nombre:

$$n(m-1)-m.$$

Quel est maintenant le nombre fondamental relatif à la décomposition qui nous occupe ici, c'est à dire à la décomposition de la fonction A_1 en éléments simples de la forme:

$$A_k\Phi_{1.1}(z, z_k) \quad \text{ou} \quad A_k\Phi_{1.2}(z, z_k).$$

Pour cela, il nous suffit d'énoncer le résultat suivant: si m est le nombre fondamental d'une décomposition quelconque en éléments simples, toutes les fonctions qui s'expriment linéairement à l'aide de q éléments donnés, peuvent être exprimées linéairement à l'aide de $q-m$ d'entre elles.

Nous avons vu que les fonctions A qui admettent q infinis donnés

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

---

[1] Acta mathematica, T. 1, p. 242.

peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de

$$2q - \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + n - 3$$

d'entre elles. Or ces fonctions peuvent s'exprimer linéairement à l'aide des $2q$ éléments simples:

$$\Phi_{1.1}(z, z_1), \ \Phi_{1.1}(z, z_2), \ \ldots, \ \Phi_{1.1}(z, z_q)$$
$$\Phi_{1.2}(z, z_1), \ \Phi_{1.2}(z, z_2), \ \ldots, \ \Phi_{1.2}(z, z_q).$$

Donc le nombre fondamental est égal à:

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n.$$

Dans la théorie des fonctions fuchsiennes et des fonctions $A(z)$ engendrées par ces transcendantes, le nombre fondamental jouissait d'une propriété remarquable que je vais rappeler.

Soit $\psi(h)$ le nombre fondamental relatif à la décomposition en éléments simples des fonctions de la forme

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x, y)$$

où F désigne une fonction rationnelle des deux fonctions fuchsiennes x et y.

Soit $\varphi(m)$ un nombre tel que les fonctions de la forme

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^{m} F(x, y)$$

(où F a la même signification que plus haut) qui ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental, s'expriment linéairement à l'aide de $\varphi(m)$ d'entre elles.

On avait l'identité:

$$\psi(h) = \varphi(h + 1).$$

C'est de cette identité que nous avons tiré une conclusion importante, à savoir que toute fonction de la forme (α) pouvait être représentée par une série thétafuchsienne (de la forme (4), § 1, *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*).

De même ici, soit:

$$\psi(h) = \Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

le nombre fondamental relatif à la décomposition de A_1.

Soit $\varphi(m)$ un nombre tel que toutes les fonctions de la forme:

$$(\beta) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m (FZ_1 + F_1 Z_1')$$

(forme (5) du § précédent) puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $\varphi(m)$ d'entre elles. On aura encore:

$$(\gamma) \qquad \psi(h) = \varphi(h + 1).$$

Voyons si on pourra tirer de cette indentité la même conclusion que dans le paragraphe cité, c'est à dire si on pourra démontrer que toutes les fonctions de la forme (β) peuvent s'exprimer par l'une des séries ξ du paragraphe précédent.

Supposons que toutes les séries ξ qui ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental et qui correspondent à un exposant m égal à $h + 1$ puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $\theta(h + 1)$ d'entre elles. On aura évidemment

$$(\delta) \qquad \theta(h + 1) \leqq \varphi(h + 1)$$

puisque toute série ξ est égale à une fonction de la forme (β). Si l'on a:

$$\theta = \varphi$$

toute fonction de la forme (β) pourra réciproquement s'exprimer par une série ξ. Il n'en serait plus de même si l'on avait:

$$\theta < \varphi.$$

Soient maintenant

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

q quantités quelconques, intérieures au cercle fondamental. Soient

$$A_1, A_2, \ldots, A_q$$

$$B_1, B_2, \ldots, B_q$$

$2q$ quantités que nous assujettirons plus loin à diverses conditions.

Soit maintenant $\xi_1(z)$ une série ξ ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental et $\xi_2(z)$ sa conjuguée. Ces séries ξ sont engendrées par le groupe fuchsien g et par le groupe zétafuchsien G_1 corrélatif de G. Assujettissons les quantités A et B à la condition suivante:

$$(\varepsilon)\qquad \begin{aligned} &A_1\xi_1(z_1) + A_2\xi_1(z_2) + \ldots + A_q\xi_1(z_q) \\ &\quad + B_1\xi_2(z_1) + B_2\xi_2(z_2) + \ldots + B_q\xi_2(z_q) = 0. \end{aligned}$$

Ecrivons cette même relation pour toutes les séries ξ qui, restant finies à l'intérieur du cercle fondamental, correspondent à un exposant m égal à $h+1$. Nous aurons de la sorte assujetti les A et les B à $\theta(h+1)$ conditions distinctes.

Posons alors

$$(\zeta)\qquad \begin{aligned} A_1(z) &= \Sigma A_k\Phi_{1.1}(z,\ z_k) + \Sigma B_k\Phi_{1.2}(z,\ z_k) \\ A_2(z) &= \Sigma A_k\Phi_{2.1}(z,\ z_k) + \Sigma B_k\Phi_{2.2}(z,\ z_k). \end{aligned}$$

Posons maintenant:

$$\Phi_{1.1}(zs_i,\ z_k) - \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^{+h}[a_i\Phi_{1.1}(z,\ z_k) + b_i\Phi_{2.1}(z,\ z_k)] = \eta_1(z_k)$$

$$\Phi_{1.2}(zs_i,\ z_k) - \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^{+h}[a_i\Phi_{1.2}(z,\ z_k) + b_i\Phi_{2.2}(z,\ z_k)] = \eta_2(z_k)$$

en supposant que

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

soit le tableau à double entrée des coëfficients de la substitution S_i correspondant à s_i. Il est clair que $\eta_1(z)$ et $\eta_2(z)$ sont deux séries ξ conjuguées ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental. Donc en vertu des relations (ε) on a:

$$A_1(zs_i) = \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^{+h}[a_iA_1(z) + b_iA_2(z)].$$

On en conclut que A_1 et A_2 sont deux fonctions de la forme:

$$A_1 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(FZ_1 + F_1Z_1')$$

$$A_2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(FZ_2 + F_1Z_2')$$

dont les identités (ζ) nous donnent la décomposition en éléments simples. Or les coëfficients A et B de cette décomposition ne sont assujettis qu'à $\theta(h + 1)$ conditions. Ce nombre $\theta(h + 1)$ est donc au moins égal au nombre fondamental, d'où l'inégalité

$$\theta(h + 1) \geqq \psi(h).$$

De la comparaison de cette inégalité avec (γ) et (δ) on déduit:

$$\theta(h + 1) = \varphi(h + 1).$$

Donc toute expression de la forme (β) qui ne devient pas infinie peut s'exprimer par une série ξ.

On en déduit aisément qu'il en est de même d'une expression de la forme (β) qui devient infinie.

Donc toute fonction zétafuchsienne est le quotient d'une série ξ par une série thétafuchsienne.

Nous avons, il est vrai, pour fixer les idées, supposé que $p = 2$, mais la démonstration et le résultat subsistent quand p est plus grand que 2.

§ 7. *Extension à la deuxième famille.*

Tout ce qui précède ne s'applique encore qu'aux groupes fuchsiens de la 1ère famille et aux groupes zétafuchsiens qui leur sont isomorphes. Il nous reste à étudier les fonctions zétafuchsiennes dont le groupe fuchsien g est de la 2de ou de la 6e familles.

Parmi ces fonctions nous distinguerons deux espèces.

La 1[ère] espèce, dont nous nous occuperons d'abord, comprendra les fonctions dérivées d'un groupe zétafuchsien G jouissant des propriétés suivantes: Le groupe fuchsien g étant de la 2[de] ou de la 6[e] familles, son polygone générateur R_0 aura des sommets sur le cercle fondamental. A chacun de ces sommets correspond une substitution parabolique du groupe g qui admet ce sommet comme point double. Les substitutions ainsi définies sont les substitutions paraboliques du groupe g; les substitutions du groupe G qui leur correspondent en vertu de l'isomorphisme s'appelleront *substitutions critiques.* Il ne faut pas confondre les substitutions critiques du groupe G et les substitutions fondamentales de ce même groupe. Les substitutions fondamentales de G seront, dans ce qui va suivre, celles qui correspondent aux substitutions de g qui changent un côté de R_0 en son conjugué ou à leurs inverses. Les substitutions critiques de G seront celles qui correspondent aux substitutions paraboliques de g qui n'altèrent pas l'un des sommets de la 2[de] sorte de R_0 ou à leurs inverses. Formons pour chacune de ces substitutions critiques *l'équation aux multiplicateurs* que l'on obtient, comme on sait, en écrivant le tableau à double entrée des coëfficients, ajoutant $-S$ à chacun des termes de la diagonale principale et égalant à 0 le déterminant ainsi obtenu. Si toutes les racines de ces équations relatives à toutes les substitutions critiques ont pour module l'unité, le groupe G et les fonctions zétafuchsiennes qui en dérivent seront de la 1[ère] espèce. Soit:

$$(1) \qquad Z_1, \ Z_2, \ \ldots, \ Z_p$$

un système zétafuchsien et $x = f(z)$ une fonction fuchsienne ayant même groupe. Nous avons vu que Z_i considéré comme fonction de x satisfait à une équation linéaire à coëfficients algébriques. Quelles sont les conditions que doit remplir cette équation pour que le système (1) soit de la 1[ère] espèce? *Il faut et il suffit que si l'on envisage les différents points singuliers de cette équation, toutes les équations déterminantes correspondantes aient toutes leurs racines réelles.*

La seconde espèce, dont il sera question au paragraphe suivant, comprend toutes les autres fonctions zétafuchsiennes.

Je dis que si le groupe G est de la 1[ère] espèce, les séries ξ du paragraphe (5) seront absolument convergentes.

Considérons en effet une substitution quelconque S du groupe G. Nous pourrons la mettre sous la forme suivante:

$$S = \Sigma_1^{\alpha_1} \Sigma_2^{\alpha_2} \ldots \Sigma_n^{\alpha_n} \tag{2}$$

où les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ sont choisies parmi les substitutions fondamentales ou les substitutions critiques et dont les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des entiers positifs. Parmi les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, il y en aura en général un certain nombre que j'appellerai $T_1, T_2, \ldots, T_q$ qui seront des substitutions critiques et j'appellerai $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ leurs exposants. J'appellerai $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-q}$ les $n-q$ exposants qui affectent des substitutions fondamentales. Nous allons chercher, comme dans le paragraphe 5, une limite supérieure des coëfficients de S, et pour cela nous envisagerons la somme des logarithmes des exposants β, $\Sigma \log \beta$ et celle des exposants γ, $\Sigma \gamma$. Soit d'abord M un nombre plus grand que les modules des coefficients des substitutions fondamentales et de leurs inverses. Soit ensuite T une quelconque des substitutions critiques, nous pourrons toujours la mettre sous la forme suivante:

$$T = UVU^{-1}$$

où V est une substitution canonique. J'appelle ainsi, à l'exemple de plusieurs géomètres, toute substitution de la forme suivante:

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p; m_1 Z_1, m_2 Z_2, \ldots, m_p Z_p) \tag{3}$$

ou bien, plus généralement:

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p; m_1 Z_1, m_2 Z_2 + n_2 Z_1, m_3 Z_3 + n_3 Z_2, \ldots, m_p Z_p + n_p Z_{p-1}) \tag{4}$$

où n_q est nul, si m_q est différent de m_{q-1}.

J'aurai donc à considérer à part les substitutions U et les substitutions V. Je supposerai que le nombre M, défini plus haut, est plus grand que les modules de tous les coëfficients de U et de U^{-1}.

Maintenant nous avons

$$T^\beta = UV^\beta U^{-1}$$

et il s'agit de trouver une limite supérieure des coëfficients de V^β. Si V est de la forme (3), tous les coëfficients de V^β ont pour modules o

ou 1. Si V est de la forme (4), on pourra trouver un polynôme entier en β de degré p au plus, à coëfficients positifs et qui sera plus grand que les modules de tous les coëfficients de V^β. Plus simplement on pourra toujours trouver un nombre M' assez grand pour que l'expression $M'\beta^p$ soit plus grande que tous ces modules. Pour simplifier encore, nous supposerons $M' = M$, en prenant pour la valeur commune de ces deux nombres, un nombre assez grand pour satisfaire à toutes les conditions que nous leur avons imposées.

En appelant M_1 et M_2 la limite supérieure des modules des coëfficients de deux substitutions S_1 et S_2, les modules des coëfficients de $S_1 S_2$ seront plus petits que

$$pM_1M_2.$$

Si donc on se reporte à l'expression (2) de la substitution S, on verra que ses coëfficients sont tous plus petits que:

$$(pM)^{\Sigma\gamma+3q}e^{p\Sigma\log\beta}. \tag{5}$$

Cherchons maintenant une limite supérieure des deux exposants qui entrent dans cette formule, à savoir $\Sigma\gamma + 3q$ et $\Sigma\log\beta$. Soit zs le transformé du point z par la substitution s du groupe g qui correspond à S. Joignons z et zs par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, et soit R la L de cet arc de cercle. C'est en fonction de R que je veux exprimer les limites supérieures cherchées.

Considérons l'un quelconque des sommets du polygone R_0 ou de l'un de ses transformés, et décrivons autour de ce sommet un petit cercle défini de la manière suivante. Si ce sommet est de la 1ère sorte et situé à l'intérieur du cercle fondamental, il devra être le centre de ce petit cercle *au point de vue non-euclidien*. Si le sommet est de la 2de sorte et situé sur le cercle fondamental, le petit cercle devra toucher le cercle fondamental en ce sommet même. Je puis toujours supposer que ces cercles ont été pris assez petits pour n'avoir aucun point commun. Il arrivera alors que la L d'un arc de courbe qui ira d'un point de l'un de ces cercles à un point d'un autre de ces petits cercles, restera toujours supérieure à une certaine limite λ. L'arc de cercle z-zs, défini plus haut, traversera un certain nombre de ces petits cercles et ce nombre ne pourra

pas être supérieur à $\frac{R}{\lambda}$. Maintenant, si nous considérons un arc de courbe ne traversant aucun de nos petits cercles et joignant deux points appartenant à deux côtés différents du polygone R_0 ou d'un de ses transformés, la L de cet arc restera toujours supérieure à une certaine limite μ.

Voyons maintenant quelle est la signification géométrique des exposants β et γ qui entrent dans l'expression (5). L'arc z-zs, en allant du point z au point zs, traverse divers côtés appartenant au polygone R_0 ou à ses transformés. La substitution S peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme (2). Nous avons d'ailleurs le droit de choisir parmi ces différentes manières, celle qui nous convient le mieux; car chacune d'elles nous conduira à une limite supérieure des coëfficients. Voici celle que nous adopterons: Soient $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ les $2n$ côtés du polygone R_0; soit R_i le polygone contigu à R_0 le long de C_i; soit s_i la substitution du groupe g qui change R_0 en R_i, et S_i la substitution correspondante du groupe G. Les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ seront les substitutions fondamentales du groupe G. Cela posé, supposons que l'arc z-zs dont nous nous occupons, sorte du polygone R_0 par exemple par le côté C_{α_1}, puis du polygone suivant par le côté homologue à C_{α_2} et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier polygone d'où il sortira par le côté C_{α_n}. Nous poserons alors:

$$S = S_{\alpha_n} S_{\alpha_{n-1}} \ldots S_{\alpha_2} S_{\alpha_1}. \tag{6}$$

Mais ce ne sera pas encore là la forme définitive que nous adopterons pour S. Supposons en effet que l'arc z-zs pénètre dans l'un des petits cercles relatifs à l'un des sommets de la 2de sorte et y franchisse un certain nombre de côtés appartenant à R_0 et à ses transformés. Tous ces côtés iront alors forcément aboutir au sommet de la 2de sorte où le petit cercle en question touche le cercle fondamental et où ils se succèderont périodiquement de la façon suivante: On rencontrera d'abord un côté homologue à C_{λ_1}, puis un côté homologue à C_{λ_2}, etc. jusqu'à ce qu'on retombe sur un côté homologue à C_{λ_1}; on retrouvera ensuite un côté homologue à C_{λ_2} et ainsi de suite dans le même ordre. Si nous réunissons ensemble les facteurs de l'expression (6) qui correspondent aux côtés

rencontrés à l'intérieur de ce petit cercle, ces facteurs pourront s'écrire de la manière suivante:

$$(7) \qquad S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1} (S_{\lambda_k} S_{\lambda_{k-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1})^{\beta}.$$

k est le nombre de côtés compris dans une période et c'est précisément le nombre des sommets de R_0 qui forment un même cycle parabolique; β est le nombre des périodes; enfin

$$S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}$$

est l'ensemble des facteurs de l'expression (6) qui forment un résidu n'entrant dans aucune période; leur nombre est plus petit que k. Mais:

$$(S_{\lambda_k} S_{\lambda_{k-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}) = T$$

est une substitution critique, de sorte qu'on peut remplacer dans l'expression (6) l'ensemble des facteurs (7) par:

$$S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1} T^{\beta}.$$

Quand on aura fait cette opération, l'expression (6) sera devenue l'expression (2) définitive et il n'y entrera, comme on le voit, que des substitutions fondamentales et des substitutions critiques.

Maintenant $\sum \gamma$ est le nombre des substitutions fondamentales entrant dans cette expression (2). Chacune d'elles correspond à une intersection de l'arc z-zs avec un côté des transformés de R_0. Quelques-unes de ces intersections auront lieu en dehors des petits cercles et leur nombre ne pourra pas être plus grand que $\frac{R}{\mu}$; les autres auront lieu à l'intérieur des petits cercles. Si l'on considère d'abord les petits cercles relatifs à un sommet de la 1ère sorte, on reconnaîtra sans peine que le nombre des intersections possibles dans chacun d'eux est limité. A l'intérieur des petits cercles relatifs aux sommets de la 2de sorte, le nombre des intersections pourrait au contraire être illimité; mais un nombre limité d'entre elles seulement se rapportent à des substitutions fondamentales entrant dans l'expression (2) définitive. On a vu en effet que dans cette expression, nous avons remplacé l'ensemble des facteurs (7) par le produit

d'un nombre *limité* de substitutions fondamentales et d'une certaine puissance d'une substitution critique. Ainsi on peut trouver une limite supérieure h du nombre des substitutions fondamentales entrant dans l'expression (2) et relatives à des intersections ayant lieu à l'intérieur d'un petit cercle. Il en résulte que:

$$\Sigma\gamma < R\left(\frac{1}{\mu} + \frac{h}{\lambda}\right).$$

Quant au nombre q, il est au plus égal au nombre des petits cercles traversés; on a donc:

$$\Sigma\gamma + 3q < R\left(\frac{1}{\mu} + \frac{h+3}{\lambda}\right).$$

Il faut maintenant trouver une limite supérieure de $\Sigma \log \beta$. Considérons un petit cercle quelconque relatif à un sommet A de la 2[de] sorte, et la substitution critique T correspondante; elle entrera à la puissance β dans l'expression (2) définitive, et ce nombre β est au plus égal au nombre des intersections qui ont lieu à l'intérieur du petit cercle entre l'arc z-zs et certains côtés qui vont tous converger au sommet A et *qui sont tous homologues entre eux.* Il est aisé de trouver une limite supérieure du nombre de ces intersections. Faisons passer par le sommet A deux cercles AB et AC orthogonaux au cercle fondamental, B et C étant par exemple sur le petit cercle considéré. La L de l'arc BC de ce petit cercle pourra s'appeler *l'écart* des deux cercles AB et AC. Soit AB_1 un côté appartenant à l'un des transformés de R_0 et aboutissant au point A; soit AB_2 le transformé de AB_1 par la substitution parabolique du groupe g qui a pour point double le point A; AB_3 le transformé de AB_2 par cette même substitution, etc.; l'écart de deux de ces transformés consécutifs AB_n, AB_{n+1} sera une constante ν. Soient maintenant B et D les deux extrémités de la portion de l'arc z-zs qui est à l'intérieur du petit cercle. Le point B se trouvera sur la circonférence de ce petit cercle et il en sera de même de D, à moins que D ne soit le point zs lui-même. Soit L_1 la L de l'arc BD et N l'écart des cercles AB et AD, on aura:

$$\beta < \frac{N}{\nu}$$

et d'autre part:

$$N \leqq \frac{e^{L_1} - e^{-L_1}}{2}$$

le cas de l'égalité se présentant lorsque les cercles *z-zs* et AD se coupent orthogonalement en D. On déduit de là:

$$\beta < \frac{e^{L_1}}{2\nu}$$

d'où

$$\log \beta < L_1 - \log 2\nu.$$

On peut trouver une quantité k_1 telle que pour tous les petits cercles relatifs à un sommet de la 2de sorte:

$$-\log 2\nu < k_1;$$

on aura alors

$$\Sigma \log \beta < R + k_1 q < R\left(1 + \frac{k_1}{\lambda}\right).$$

Telles sont les deux limites supérieures cherchées. On en déduit que les coëfficients de la substitution S sont plus petits que

$$e^{aR}$$

a étant une constante. C'est le résultat auquel nous étions parvenus dans le paragraphe 5 et d'où nous avions conclu la convergence des séries ξ. Ces séries sont donc encore convergentes dans le cas qui nous occupe.

Ainsi les conclusions du paragraphe 5 subsistent ici. En est-il de même de celles du paragraphe 6 et en particulier de l'identité suivante:

$$(S) \qquad A_i - Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} = \sum \frac{A_1}{z-a} + \sum \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \sum \frac{A_m}{(z-a)^m}$$

où Z_i est une fonction zétafuchsienne et f une fonction fuchsienne de z, où les a sont les infinis du premier membre et les A les résidus correspondants?

En d'autres termes l'intégrale:

$$(9) \qquad \int \frac{Z_i(z)}{z - x} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^{-h} dz$$

prise le long d'un contour convenablement choisi tend elle encore vers o, lorsque ce contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental? Cela ne serait évidemment pas vrai si nous choisissions l'expression sous le signe $\int$ d'une façon tout à fait quelconque. Nous lui imposerons la condition de s'annuler en tous les sommets de R_0 situés sur le cercle fondamental; je veux dire qu'en tous ces sommets les p fonctions

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

du système considéré multipliées par $\frac{1}{z - x}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$ s'annuleront en même temps. Il existe évidemment une infinité de systèmes zétafuchsiens, engendrés par deux groupes g et G donnés et satisfaisant à cette condition.

Je puis supposer également, mais cette fois pour simplifier seulement, que l'expression

$$(10) \qquad Z_i(z) \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^{-h} = A_i$$

ne devient pas infinie le long du périmètre de R_0, non plus bien entendu qu'aucune des expressions qu'on obtient en donnant à l'indice i l'une des valeurs $1, 2, 3, \ldots, p$.

Cela posé, nous avons dit que l'expression (10) devait s'annuler pour $z = \alpha_i$, (si α_i est un sommet de la 2[de] sorte) c'est à dire que son module devait tendre vers o quand z tend vers α_i en suivant l'un des côtés de R_0. Voyons comment cette expression tend vers o. Supprimons l'indice i du sommet α_i et appelons-le simplement α pour abréger. Le module de α sera égal à 1 puisque ce sommet est sur le cercle fondamental.

Posons

$$t = \frac{\beta}{z - \alpha}$$

β étant un coëfficient convenablement choisi.

Nous avons vu que les fonctions fuchsiennes de z sont dans le voisinage de $z = \alpha$, holomorphes en e^t, et les fonctions zétafuchsiennes sont de la forme

$$P_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2 + \ldots + P_q e^{\lambda_q t} \Phi_q \tag{11}$$

où les Φ sont holomorphes en e^t et où les P sont des polynômes entiers en t. D'ailleurs il est aisé de voir que β est une quantité telle, que quand l'argument de z est le même que celui de α et son module plus petit, la valeur de t est réelle et négative; si donc z tend vers α en suivant un des côtés de R_0, e^t tend vers o.

On a d'ailleurs:

$$\frac{df}{dz} = t^2 \Phi'$$

Φ' étant holomorphe en e^t.

Donc l'expression (10) peut se mettre sous la forme d'une somme de termes de la forme suivante:

$$\sum B t^\mu e^{\nu t}$$

où B, μ et ν sont des constantes. Pour que l'expression (10) tende vers o, il faut et il suffit que toutes les constantes ν aient leur partie réelle positive.

Soit maintenant R la distance de l'origine au point z, comptée au point de vue non-euclidien. Nous aurons

$$|z| = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}.$$

Supposons que l'argument de z soit le même que celui de α, on aura:

$$|t| = \frac{|\beta|}{1 - |z|} = \frac{|\beta|}{2}(e^{2R} + 1).$$

Lorsque z tend vers α, l'expression

$$|t| e^{-2R}$$

tend vers une limite finie $\frac{|\beta|}{2}$. Il est aisé de voir qu'il en est encore de même quand z tend vers a en suivant l'un des côtés de R_0. Il en résulte que l'expression

$$Ae^{mR}$$

tendra vers o quel que soit m quand z tendra vers α en suivant les côtés de R_0. D'où, cette conclusion, c'est qu'on peut trouver un nombre M tel que l'inégalité

$$|A| < M(e^{2R} + e^{-2R} + 2)^{-h}$$

subsiste tout le long du périmètre de R_0.

Considérons maintenant deux points transformés l'un de l'autre z et zs_i et appelons A et R leurs distances à l'origine évaluées au point de vue non-euclidien. Soit λ_0 le plus grand module des p quantités:

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

au point z, et soit λ_1 le module de l'un des A au point zs_i. Cherchons une limite supérieure du rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$.

Nous avons vu que les coëfficients de la substitution S_i du groupe G qui correspond à s_i étaient plus petits que:

$$e^{aL}$$

a étant une constante et L la distance non-euclidienne de z à zs_i. Mais on n'a qu'à se reporter au mode de démonstration adopté, pour voir que dans cette expression, L peut tout aussi bien représenter la distance du point zs_i à un point quelconque situé dans le même polygone que z. Si donc les points θ et z sont tous deux dans le polygone R_0, les coëfficients de S_i seront tous plus petits que:

$$e^{aR}.$$

D'autre part on a:

$$\frac{df(zs_i)}{dzs_i} = \frac{df(z)}{dz}\frac{e^{2R} + e^{-2R} + 2}{e^{2A} + e^{-2A} + 2}.$$

On déduit de là:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < pe^{aR}\left(\frac{e^{2R}+e^{-2R}+2}{e^{2A}+e^{-2A}+2}\right)^{-h}.$$

Si le point z est sur le périmètre de R_0, on a:

$$\lambda_0 < M(e^{2A}+e^{-2A}+2)^{-h}.$$

On en déduit:

$$\lambda_1 < pMe^{aR}(e^{2R}+e^{-2R}+2)^{-h}.$$

Nous pourrons écrire plus simplement:

$$\lambda_1 < pMe^{(a-2h)R}.$$

Il reste à montrer maintenant que la longueur du contour d'intégration est finie. Nous supposerons que la portion du plan limitée par ce contour est formée d'un certain nombre de polygones transformés de R_0. Le contour sera donc formé d'un certain nombre de côtés de ces polygones, et il s'agit de faire voir que l'on peut choisir ces polygones de manière que le contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental et reste cependant de longueur finie.

Pour simplifier la démonstration, nous nous restreindrons aux groupes g de la 2[de] famille, laissant de côté la 6[e] famille qui est beaucoup moins importante et pour laquelle d'ailleurs le résultat reste vrai.

Pour la 2[e] famille, le polygone R_0 et ses transformés ont tous leurs sommets sur le cercle fondamental, et le contour d'intégration, quels que soient les polygones qui le forment, se compose toujours d'un certain nombre d'arcs de cercles tangents deux à deux et orthogonaux au cercle fondamental. Il est aisé de voir alors que sa longueur reste toujours plus petite que π^2. Supposons maintenant que l'on prenne pour contour d'intégration le périmètre de la portion du plan formée de tous les polygones transformés de R_0 qui sont, en totalité ou en partie, intérieurs au cercle K qui a pour centre l'origine et pour rayon R (au point de vue non-euclidien). L'intégrale (9) est alors plus petite que:

$$\pi^2 pMe^{(a-2h)R}.$$

Si $2h$ est plus grand que a, elle tendra vers 0 quand R croîtra indéfiniment. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer. On peut en conclure que

l'identité (8), analogue à l'identité (5) du paragraphe précédent, subsiste encore dans le cas qui nous occupe. Il en est de même des résultats que nous en avons déduits et en particulier de la décomposition en éléments simples des expressions telles que A et des fonctions zétafuchsiennes.

Le résumé du présent paragraphe, c'est qu'il n'y a aucune différence essentielle entre les fonctions zétafuchsiennes que nous venons d'appeler de la 1ère espèce et les fonctions engendrées par les groupes fuchsiens de la 1ère famille.

§ 8. *Fonctions de la deuxième espèce.*

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions zétafuchsiennes étudiées étaient de la première espèce, c'est à dire que les substitutions critiques avaient des multiplicateurs de module 1. Les mêmes résultats subsisteront-ils pour les fonctions de la deuxième espèce? Il est aisé de voir que non.

Reprenons en effet dans ce cas la série ξ du paragraphe 5. Je dis qu'elle sera divergente ou tout au moins qu'elle ne sera pas absolument convergente. En effet ne conservons dans cette série qu'une partie des termes. Soit:

$$\left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a}+\beta\right)$$

une substitution parabolique s_i du groupe g et soit S_i la substitution critique correspondante du groupe G. Elle pourra toujours se mettre sous la forme canonique

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p; M_1Z_1, M_2Z_2, \ldots, M_pZ_p).$$

Ne conservons dans la série ξ que les termes qui correspondent à la substitution s_i et à ses puissances positives et négatives. Ces termes s'écriront:

$$\sum H\left(\frac{1}{z-a}+q\beta\right)M_\mu^{-q}[q\beta(z-\alpha)+1]^{-2m}$$

où H est le signe d'une fonction rationnelle et où q prend toutes les valeurs entières positives et négatives.

J'écrirai plus simplement:

$$\sum M_\mu^{-q}\varphi(q)$$

$\varphi(q)$ étant une fonction rationnelle de q. Cette série est évidemment divergente.

Les résultats du paragraphe 5 ne sont donc plus vrais ici, et il en est de même de ceux du paragraphe 6 qui y sont d'ailleurs intimement liés.

Mais de ce que ces résultats ne peuvent être étendus *sans modification* à la deuxième espèce, il ne suit pas qu'il ne peuvent être généralisés et c'est ce que nous allons chercher à faire.

Enonçons d'abord les résultats particls qui subsistent sans changement.

1°. Les coëfficients d'une substitution S_i quelconque du groupe G sont plus petits que A^σ, A étant une constante et σ l'exposant de la substitution S_i.

2°. Si l'on a:

$$A_i(z) = Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$$

et que A_i s'annule ainsi que ses $p-1$ conjuguées en tous les sommets de la 2e sorte de R_0, l'expression

$$Ae^{mR}$$

où R désigne la distance non-euclidienne de z à l'origine, tend vers 0 quand z tend vers l'un de ces sommets en suivant le périmètre de R_0.

3°. Si de plus les A ne deviennent pas infinis le long du périmètre de R_0, on pourra trouver un nombre M tel que le long de ce périmètre, on ait:

$$|A| < M(e^{2R} + e^{-2R} + 2)^{-h}.$$

4°. Le périmètre d'une figure simplement connexe formée par un certain nombre de transformés de R_0 est toujours plus petit que π^2 (si nous nous restreignons à la 2e famille, comme nous l'avons fait précédemment).

Il résulte de ce qui précède, et l'on peut s'en assurer en se reportant au paragraphe précédent, que si z est un point du périmètre du transformé de R_0 par une substitution S_i d'exposant σ, on a en ce point z:

$$|A| < A^\sigma M e^{-2hR}.$$

Maintenant voici le problème qu'il faudrait chercher à résoudre:

Trouver une fonction $F(z)$ telle que l'intégrale

$$\int \frac{A dz}{(z-x)F}$$

tende vers o quand on la prend le long d'un contour convenablement choisi et se rapprochant indéfiniment du cercle fondamental.

Voici le contour que nous choisirons: Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ au point de vue non-euclidien. Considérons l'ensemble des polygones transformés de R_0 et qui sont partiellement intérieurs à ce cercle. Cet ensemble formera une figure simplement connexe dont le périmètre sera plus petit que π^2 et dont tous les points seront à une distance non-euclidienne de l'origine plus grande que ρ. Nous ferons ensuite croître ρ indéfiniment.

Voyons quelles sont les conditions qu'il nous faut pour cela imposer à la fonction F:

1°. Lorsque z tend vers un sommet de la 2de sorte, en suivant le périmètre de R_0, F ne doit pas tendre vers o assez rapidement pour que

$$\left|\frac{A}{F}\right|(e^{2R}+e^{-2R}+2)^{-k}$$

ne tende pas vers o.

2°. Lorsque z se trouve sur le périmètre du transformé de R_0 par une substitution d'exposant σ, son module doit être plus grand que:

$$BC^{\sigma}$$

B et C étant des constantes suffisamment grandes.

Il est sans doute possible de trouver une pareille fonction F, mais ce n'est pas ainsi que nous procéderons ici. L'analogie avec la théorie des facteurs primaires de M. WEIERSTRASS et avec le théorème de M. MITTAG-LEFFLER va nous conduire à la généralisation cherchée.

Soit en effet $f(x)$ une fonction entière à décomposer en facteurs primaires. Supposons par exemple qu'elle n'a que des zéros simples $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Pour résoudre ce problème, on cherche à décomposer en fractions simples le quotient:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

et on obtient ce résultat par la considération de l'intégrale:

$$\int \frac{dz}{z^m(z-x)}\frac{f'(z)}{f(z)}$$

prise le long d'un cercle dont le centre est l'origine et dont le rayon croît indéfiniment.

Supposons d'abord que l'on puisse trouver un nombre m assez grand pour que cette intégrale tende vers 0. On trouve alors:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{x^m}{a_i^m(x-a_i)} + P(x)$$

$P(x)$ étant un polynôme entier d'ordre $m-1$.

Dans ce cas la fonction $f(x)$ est dite, comme on sait, de première espèce et de genre m.

Si au contraire on ne peut pas trouver de nombre m assez grand pour que l'intégrale tende vers 0, on fera croître le nombre m avec le rayon du cercle qui sert de contour d'intégration et on pourra toujours le faire croître assez vite pour que l'intégrale tende vers 0. On trouve alors:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim \left[\sum \frac{x^m}{a^m(x-a)} + P(x)\right].$$

Dans cette expression le signe Σ se rapporte à l'ensemble des points a situés à l'intérieur du cercle de rayon R et $P(x)$ représente le polynôme formé des m premiers termes du développement de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ suivant les puissances de x. Quand m et R croissent indéfiniment selon une certaine loi, le second membre tend vers une limite qui n'est autre chose que $\frac{f'(x)}{f(x)}$. C'est de cette expression qu'on peut déduire le développement de $\frac{f'}{f}$ sous forme de série:

$$\frac{f'}{f} = \sum \frac{x^\mu}{a^\mu(x-a)} + G(x)$$

μ étant un entier qui croît indéfiniment avec le module de a et $G(x)$ étant une transcendante entière.

La fonction entière $f(x)$ est alors de 2de espèce.

L'analogie avec le problème qui nous occupe est évidente. Les fonctions zétafuchsiennes de 1ère espèce, dont nous avons parlé dans les paragraphes précédents, sont analogues aux transcendantes entières de 1ère espèce et on en obtient le développement et la décomposition en éléments simples en remarquant que l'intégrale:

$$\int \left(\frac{df}{dz}\right)^{-m} \frac{Z(z)}{z-x} dz$$

tend vers 0 quand le nombre m est suffisamment grand et que le contour d'intégration, d'ailleurs convenablement choisi, se rapproche indéfiniment du cercle fondamental.

Si au contraire $Z(z)$ est une fonction de 2de espèce, on ne peut plus trouver un nombre m assez grand pour qu'il en soit ainsi. On est donc conduit, au lieu de conserver à l'exposant m une valeur constante, à le faire croître indéfiniment en même temps que le contour d'intégration se rapproche du cercle fondamental, et cela assez vite pour que l'intégrale tende vers 0.

Cela est toujours possible. Il faut toutefois faire une hypothèse sur la fonction fuchsienne $f(z)$ dont la dérivée $\frac{df}{dz}$ entre sous le signe $\int$ dans l'intégrale précédente. Il faut supposer que $\frac{df}{dz}$ croisse indéfiniment quand z tend vers un des sommets de R_0 situé sur le cercle fondamental, en suivant l'un des côtés de ce polygone. Il existe en effet une infinité de fonctions fuchsiennes admettant le groupe g et jouissant de cette propriété.

Mais nous pouvons généraliser un peu la forme de l'intégrale considérée en procédant de la manière suivante. Soient f et f_1 les deux fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et soit $F(x, y)$ une fonction rationnelle de x et de y, choisie de telle sorte que:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F(f, f_1)$$

tende vers 0 quand z se rapproche indéfiniment d'un sommet de R_0 situé sur le cercle fondamental.

Considérons alors l'intégrale:

$$\int \left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^{\mu} Z_i \frac{dz}{z-x}$$

prise le long du contour envisagé dans le paragraphe précédent et qui limite la portion du plan formée de tous les polygones transformés de R_0 qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle dont le centre est o et le rayon non-euclidien R. Nous ferons croître μ indéfiniment en même temps que ce contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental, c'est à dire en même temps que la quantité R croît elle-même au delà de toute limite.

On peut d'abord trouver deux nombres M et λ tels que le long du périmètre de R_0, le module de Z_i soit plus petit que:

$$Me^{\lambda t}$$

où

$$t = \frac{1}{1-|z|}.$$

De plus nous pouvons trouver deux nombres positifs N et α tels que le long du périmètre de R_0, le module de

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F$$

soit plus petit que

$$Ne^{-\alpha t}(e^{2\rho} + e^{-2\rho} + 2)^{-1}$$

ρ étant la distance non-euclidienne des deux points o et z. Le module de la quantité sous le signe $\int$ en laissant de côté le facteur:

$$\frac{1}{z-x}$$

dont le module est essentiellement fini, est plus petit que:

$$MN^{\mu}e^{(\lambda-\alpha\mu)t}(e^{2\rho} + e^{-2\rho} + 2)^{-\mu}$$

le long du périmètre de R_0.

Mais l'intégrale doit être prise le long d'un contour que nous avons défini plus haut, qui est formé de côtés appartenant à divers transformés de R_0 et qui est d'ailleurs tout entier extérieur au cercle de centre o et de rayon non-euclidien R. Considérons un des côtés de ce contour appartenant à un polygone R_i transformé de R_0 par une substitution s_i. Soit zs_i ce point; le point correspondant du périmètre de R_0 sera z. Nous conserverons la notation:

$$t = \frac{1}{1 - |z|}$$

et nous appellerons ρ et ρ' les distances non-euclidiennes des points z et zs_i au point o. Il vient alors:

$$\rho' > R.$$

Le module de Z au point zs_i est plus petit que le module de cette même fonction au point z multiplié par A^σ, A étant une constante convenablement choisie et σ étant l'exposant de la substitution s_i. Quant à

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F$$

son module se trouve multiplié par

$$\left(\frac{e^{2\rho'} + e^{-2\rho'} + 2}{e^{2\rho} + e^{-2\rho} + 2}\right)^{-1}$$

quand on passe du point z au point zs_i. Il résulte de là qu'au point zs_i le module de la fonction sous le signe $\int$ est plus petit que:

$$A^\sigma MN^\mu e^{(\lambda-\alpha\mu)t}(e^{2\rho'} + e^{-2\rho'} + 2)^{-\mu}$$

ou que

$$A^\sigma MN^\mu e^{(\lambda-\alpha\mu)t} e^{-2\mu R}.$$

Je puis d'abord toujours supposer que N est plus petit que 1. En effet s'il n'en était pas ainsi, je remplacerais la fonction F que j'ai choisie arbitrairement parmi les fonctions fuchsiennes de groupe g par la fonction $\frac{F}{N}$.

Si μ est suffisamment grand, le facteur $e^{(\lambda-a\mu)t}$ est également plus petit que 1, de sorte qu'il reste à considérer les deux facteurs:

$$A^\sigma e^{-2\mu R}.$$

On voit aisément que

$$\sigma < e^{\beta R}$$

β étant un nombre convenablement choisi, mais on peut faire croître μ assez rapidement avec R, pour que

$$e^{\beta R}\log A - 2\mu R$$

tende vers $-\infty$. Dans ces conditions, la quantité sous le signe $\int$ tend vers 0 et, comme le périmètre d'intégration est fini, l'intégrale elle-même tend vers 0.

C. Q. F. D.

Quelle conclusion devons-nous tirer de là en ce qui concerne le développement de la fonction Z?

La fonction:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^\mu Z$$

a à l'intérieur du contour d'intégration le caractère d'une fonction rationnelle. Nous pourrons donc trouver une fonction rationnelle $Q(z)$ telle que la différence

$$\Delta = \left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^\mu Z - Q$$

soit holomorphe à l'intérieur de ce contour. Pour achever de déterminer la fonction rationnelle Q, nous supposerons que son numérateur est de degré inférieur à son dénominateur.

Dans ces conditions, la différence Δ tend vers 0 lorsque μ et R croissent indéfiniment. C'est là, la conséquence immédiate de ce que nous avons vu au sujet de l'intégrale.

On voit par là que la fonction Z peut avec une approximation aussi grande que l'on veut être mise sous la forme d'une fonction rationnelle multipliée par une expression de la forme:

$$\frac{1}{F}\left(\frac{df}{dz}\right)$$

F et f étant deux fonctions fuchsiennes.

C'est tout ce que j'ai pu trouver jusqu'ici comme extension aux fonctions de 2e espèce des propriétés que nous avons démontrées plus haut. Je ne doute pas qu'on ne puisse arriver un jour à une théorie plus complète.

En attendant, nous pouvons toujours exprimer une fonction zétafuchsienne quelconque, soit sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de z, soit sous la forme du quotient de deux pareilles séries.

Soit d'abord en effet une équation linéaire:

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \sum_k \varphi_k(x, y)\frac{d^k v}{dx^k} = 0$$

les φ_k étant rationnels et x et y étant liés par la relation

$$\psi(x, y) = 0.$$

On pourra toujours remplacer x et y par deux fonctions fuchsiennes $f(z)$ et $f_1(z)$, *de la 2ème famille,* choisies de telle sorte qu'elles satisfassent à la relation:

$$\psi(f, f_1) = 0$$

et qu'elles ne puissent prendre aucune des valeurs qui correspondent aux points singuliers ni aux points à apparence singulière de l'équation précédente. Dans ces conditions, v sera une fonction zétafuchsienne de z ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental et développable par conséquent en série suivant les puissances de z. Les coëfficients se calculent par récurrence.

Supposons maintenant que $Z(z)$ soit une fonction zétafuchsienne admettant des infinis à l'intérieur du cercle fondamental; elle ne pourra plus être développée en série ordonnée suivant les puissances de z et toujours convergente. Mais on pourra toujours trouver deux fonctions fuchsiennes f et F admettant le groupe g et un nombre entier m, tels que les deux fonctions

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^m F \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dz}\right)^m FZ$$

dont le quotient est Z, restent finies à l'intérieur du cercle fondamental. Elles pourront alors être développées en séries suivant les puissances croissantes de z. Quant aux coëfficients, on pourra les calculer par récurrence, ainsi que nous l'avons dit plus haut.

§ 9. *Fonctions diverses.*

Les fonctions zétafuchsiennes, dont il a été question dans les paragraphes précédents, ne sont pas les seules que l'on peut imaginer. On peut construire en effet des fonctions zétafuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan; ce sont des fonctions qui subissent les substitutions linéaires d'un groupe G quand la variable subit les substitutions d'un groupe fuchsien g de la 3e, de la 4e, de la 5e ou de la 7e familles. On peut aussi remplacer le groupe g par un groupe kleinéen, et on obtiendra de la sorte des fonctions zéta-kleinéennes, existant, soit dans toute l'étendue du plan, soit dans un certain domaine.

Cela suffit pour faire comprendre que dans les cinq mémoires des Acta mathematica que j'ai consacrés à l'étude des transcendantes fuchsiennes et kleinéennes, je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste, qui fournira sans doute aux géomètres l'occasion de nombreuses et importantes découvertes.

Paris, 30 Mai 1884.

ZUR THEORIE DER

STETIGEN FUNKTIONEN EINER REELLEN VERÄNDERLICHEN [1]

VON

LUDWIG SCHEEFFER

in MÜNCHEN.

(Fortsetzung von B. 5, pag. 183—194.)

In dem ersten Teile dieser Arbeit haben wir einige Erweiterungen des bekannten Satzes bewiesen:

Wenn die Differentialquotienten zweier stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ überall endlich und einander gleich sind, so besteht die Gleichung

$$F(x) = f(x) + \text{const.}$$

Wir haben nämlich (§ 1) statt des Begriffes *Differentialquotient* vier allgemeinere Begriffe eingeführt, *vordere obere* (D^+), *vordere untere* (D_+), *hintere obere* (D^-) *und hintere untere* (D_-) *Ableitung*, und haben gezeigt, dass der Begriff *Differentialquotient* in dem obigen Satze durch jeden dieser vier allgemeineren Begriffe ersetzt werden kann. Dadurch entstand der Satz I:

Weiss man, dass zwischen den stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ für alle Punkte des Intervalles x_0x_1 die Relation

(1) $$DF(x) - Df(x) = 0$$

([1]) Zwei inzwischen im 24[ten] Bande der Mathematischen Annalen erschienene Aufsätze der Herrn HARNACK und HÖLDER bieten mehrfach Berührungspunkte mit den vorliegenden Untersuchungen.

gilt, in welcher D eine der vier Ableitungen D^+, D_+, D^-, D_-, und zwar für alle Punkte dieselbe, bedeutet, so darf man schliessen, dass im ganzen Intervalle $x_0 x_1$

$$F(x) = f(x) + \text{const.} \tag{2}$$

sei.

Wir haben dann (§ 2—5) gezeigt, dass der Schluss auf das Bestehn der Gleichung (2) unter Umständen auch dann noch zulässig bleibt, wenn die Gültigkeit der Voraussetzung (1) nicht für alle Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ gesichert ist, sei es, dass an gewissen Stellen die Grössen $DF(x)$ und $Df(x)$ beide unendlich gross werden, oder dass ihre Gleichheit nicht nachweisbar ist. Es reicht beispielsweise (§ 3 Satz IIa) zur Begründung der Relation (2) aus, dass die Gleichung (1) an allen Stellen x gilt, ausgenommen höchstens eine Menge P, deren abgeleitete Menge P' endlich oder abzählbar unendlich ist.

Man kann nun allgemein fragen:

In welchem Umfang, d. h. für wie viel Punkte x muss die Gleichung (1) erfüllt sein, damit man — immer unter Voraussetzung der Stetigkeit von $F(x)$ und $f(x)$ — schliessen darf, dass auch die Gleichung (2) bestehe?

Zur Beantwortung dieser Frage sind im Folgenden einige Untersuchungen angestellt, teils von der positiven, teils von der negativen Seite, von deren Ergebnissen wir als neu die nachfolgenden hervorheben:

Gilt die Gleichung (1) für alle irrationalen Werte von x, so darf man schliessen, dass auch die Gleichung (2) besteht (§ 1).

Ist dagegen die Gültigkeit der Gleichung (1) nur für alle rationalen Werte von x nachgewiesen, so besteht nicht notwendig die Gleichung (2). Denn es giebt stetige Funktionen $\psi(x)$, die nicht durchaus constant sind und dennoch für alle rationalen x den Differentialquotienten Null haben; die Gleichung (1) wird also auch in dem verlangten Umfange befriedigt, wenn man $F(x) = f(x) + \psi(x)$ setzt (§ 3).

Ehe jedoch wir in die Untersuchungen über diesen Gegenstand eintreten, sei es gestattet, nachträglich noch mit einigen Worten die Einführung der Begriffe D^+, D_+, D^-, D_- zu rechtfertigen und die Zweckmässigkeit derselben zu beleuchten.

Es scheint uns, dass diese Begriffe für eine folgerechte Darstellung der allgemeinen Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränder-

lichen vor dem Begriffe des Differentialquotienten den Vorzug besitzen, dass die Existenz derselben *a priori* für alle stetigen Funktionen gesichert ist, wie wir bei anderer Gelegenheit gezeigt haben,(¹) während die Existenz eines Differentialquotienten an specielle Bedingungen geknüpft ist. Eine Beschränkung auf das Gebiet der differentiirbaren Funktionen und gleichzeitig die Einführung des Begriffes Differentialquotient wird, wie jede Beschränkung in einer allgemeinen Theorie, so lange thunlichst vermieden werden müssen, bis es sich herausstellt, dass dieselbe entweder zur Erreichung gewisser Resultate unumgänglich ist oder doch wesentliche Vereinfachungen der Betrachtung nach sich zieht. Dies ist weder bei den früher von uns angestellten, noch bei den hier folgenden Untersuchungen der Fall, und daher erscheint es uns angemessen, in denselben die allgemeinen Begriffe D^+, D_+, D^-, D_- beizubehalten.

Dagegen kommt man bei der weiteren Entwickelung der Theorie sehr bald an eine Stelle, wo das Aufgeben der allgemeinen Begriffe und die Einführung der speciellen zur Notwendigkeit wird. Und gerade dadurch, dass man die Einführung des *Differentialquotienten* bis zu diesem Punkte verschiebt, erreicht man den Vorteil, dass sich dieser neue Begriff nun ohne jede Willkürlichkeit und gleichsam von selbst ergiebt. Der Fall tritt ein, wenn man mit den abgeleiteten Funktionen D^+, D_+, D^-, D_- ähnliche Untersuchungen, wie mit den ursprünglichen vornehmen und daher gewisse Forderungen in Betreff ihrer Stetigkeit stellen will. Es zeigt sich nämlich erstens, dass, wenn eine der 4 abgeleiteten Funktionen, etwa $D^+f(x)$, nur Unstetigkeiten *erster Art* aufweist, d. h. wenn an allen Stellen Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon=0} D^+f(x+\varepsilon) \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon=0} D^+f(x-\varepsilon)$$

existiren, notwendig überall die Gleichungen

$$D^+f(x) = D_+f(x) \quad \text{und} \quad D^-f(x) = D_-f(x)$$

bestehn; und zweitens, dass, wenn eine der abgeleiteten Funktionen durchaus stetig ist, durchweg die Gleichungen

$$D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x)$$

(¹) Acta Mathematica, B. 5, p. 52

gelten.[1] Führt man nun im ersten Falle für die paarweise einander gleichen Funktionen die Bezeichnungen $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$, im zweiten Falle, da auch diese beiden Funktionen einander gleich sind, die Bezeichnung $f'(x)$ ein, so hat man die Begriffe *vorderer Differentialquotient, hinterer Differentialquotient* und *Differentialquotient* gewonnen. *Man gelangt also zu der Beschränkung auf differentiirbare Funktionen und zum Begriffe »Differentialquotient» ganz von selbst dadurch, dass man nur die Stetigkeit einer der abgeleiteten Funktionen verlangt.* Eine ohne Zweifel äusserst merkwürdige Thatsache!

Soviel über die Zweckmässigkeit der Begriffe D^+, D_+, D^-, D_- für die folgerechte Entwickelung der Theorie der stetigen Funktionen. Was die Nützlichkeit derselben für andere Untersuchungen betrifft, so sei es gestattet, auf einige unserer Theoreme über Rectificirbarkeit der Curven, besonders auf das Theorem IV (Acta Mathematica, B. 5, p. 62) hinzuweisen, aus welchem hervorgeht, dass von dem Verhalten der Ableitungen $D^+f(x)$, ... die Existenz der Länge einer durch die Gleichung $y = f(x)$ definirten Curve abhängen kann in Fällen, wo der Differentialquotient der Funktion $f(x)$ und mit ihm das Integral $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ völlig unbestimmt ist.

Wir gehn nun zu den eingangs angekündigten Untersuchungen über.

§ 1.

Satz IV (Erweiterung des Satzes II_a). Wenn man von zwei im Intervalle $x_0 x_1$ überall stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss, dass die Gesammtheit der Stellen x, an denen die vorderen oberen Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) entweder nicht beide endlich

---

[1] Beide Sätze sind unmittelbar aus unserem Hülfssatz III (Acta Mathematica, B. 5, p. 190) abzuleiten; der zweite findet sich auch bei Dini (*Fondamenti*, p. 196, 3°).

oder nicht einander gleich sind, höchstens eine abzählbar unendliche Menge P bildet, so ist im ganzen Intervall

$$F(x) = f(x) + const.$$

Beweis.

Es sei an allen Stellen des Intervalles $x_0 x_1$ mit Ausnahme der Punkte P

$$D^+ F(x) = D^+ f(x).$$

Wir bilden die Funktion

$$\varphi_c(x) = cx + F(x) - f(x),$$

in welcher c eine willkürliche positive Constante ist. Dann wird, wenn x kein Punkt der Menge P ist, notwendig

$$D^+ \varphi_c(x) \geq c.$$

Der Beweis ist von p. 184 des ersten Teiles dieser Arbeit unmittelbar zu übertragen.

Wir behaupten, dass die Differenz

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)]$$

im Intervall $x_0 x_1$ an keiner Stelle negativ werden kann. Nehmen wir nämlich an, dass für $x = x'$ die Gleichung

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)] = -H$$

erfüllt wäre, wo H eine positive Grösse ist, so gelangen wir auf folgende Art zu einem Widerspruche.

Es sei $0 < \eta < H$, $C = \frac{H - \eta}{x' - x_0}$. Dann wird der Wert der Funktion $\varphi_c(x) - \varphi_c(x_0)$ an der Stelle $x = x'$ kleiner als $-\eta$ sein, falls nur die positive Constante c kleiner als C ist. Es wird folglich, da die Differenz $\varphi_c(x) - \varphi_c(x_0)$ für $x = x_0$ den Wert 0 hat, im Intervall $x_0 x'$ eine Stelle

x_c existiren, welche die obere Grenze aller derjenigen Punkte ist, an denen $\varphi_c(x) - \varphi_c(x_0) \geqq -\eta$ ist. An dieser Stelle x_c ist erstens

$$\varphi_c(x_c) - \varphi_c(x_0) = -\eta$$

wegen der Stetigkeit der Funktion $\varphi_c(x)$, und zweitens

$$\varphi_c(x_c + h) - \varphi_c(x_c) < 0$$

für alle Werte h zwischen 0 und $x' - x_c$, folglich auch $D^+\varphi_c(x_c) \leqq 0$. Der Punkt x_c muss also zur Menge P gehören, denn für alle anderen Punkte ist, wie vorher gezeigt, $D^+\varphi_c(x) \geqq c$. Geben wir der Constanten c einen anderen Wert c_1 so wird sich auf dieselbe Weise eine Stelle $x = x_{c_1}$ bestimmen lassen, und es ist leicht einzusehn, dass x_{c_1} nicht gleich x_c sein kann. Denn die Grösse x_c muss der Gleichung

$$\varphi_c(x) - \varphi_c(x_0) = -\eta,$$

die Grösse x_{c_1} der Gleichung

$$\varphi_{c_1}(x) - \varphi_{c_1}(x_0) = -\eta$$

genügen; jede dieser Gleichungen für sich zeigt, dass x nicht gleich x_0 sein kann; die durch Subtraktion der Gleichungen sich ergebende Relation kann daher nur erfüllt sein, wenn $c = c_1$ ist. Wir sehn hieraus, dass nicht nur jedem Werte von c, der zwischen 0 und C liegt, ein bestimmter Wert x_c aus der Menge P entspricht, sondern dass auch verschiedenen Werten von c immer verschiedene Werte von x_c entsprechen. Dies ist aber mit der Voraussetzung, dass die Menge P höchstens abzählbar unendlich sein sollte, unvereinbar. Denn denken wir uns die sämmtlichen Werte von x, die zur Menge P gehören, in eine einzige Reihe geordnet und bilden aus dieser eine neue Reihe $\overline{P}$, indem wir ordnungsmässig alle diejenigen Elemente der ersten Reihe auswählen, welche irgend einem Werte von c als zugehöriges x_c entsprechen, so müsste jedem zwischen 0 und C gelegenen Werte von c ein Element der Reihe $\overline{P}$ und jedem Element der Reihe $\overline{P}$ ein Wert von c entsprechen, d. h. es würde eine gegenseitig eindeutige Correspondenz stattfinden zwischen den Elementen der abzählbaren Menge P einerseits und den Elementen der continuirlichen

Wertmenge c andererseit. Herr G. CANTOR hat aber (BORCHARDT's Journal, B. 77, p. 260) in aller Strenge bewiesen, dass eine derartige Zuordnung unmöglich ist.

Die Annahme

$$[F(x') - f(x')] - [F(x_0) - f(x_0)] = -H$$

enthält also einen Widerspruch gegen die Voraussetzung. Durch Vertauschung von F und f wird unmittelbar ersichtlich, dass auch die Annahme

$$[F(x') - f(x')] - [F(x_0) - f(x_0)] = H$$

unzulässig ist. Es muss daher für jeden Wert von x'

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)] = 0$$

sein, womit der Satz IV vollständig bewiesen ist.

Der Satz IV ist weit allgemeiner, als die bisher bekannten Sätze dieser Art, speciell weit allgemeiner, als unser Satz II$_a$, der in jenem enthalten ist.

Soviel wir wissen, hat man sich bisher im Wesentlichen darauf beschränkt, sogenannte »Punktmengen erster Art» als Ausnahmestellen anzunehmen, indem man nachwies, dass die Gleichheit zweier stetigen Funktionen — abgesehn von einer additiven Constante — aus der Gleichheit der Ableitungen gefolgert werden darf, wenn die Stellen, wo diese Ableitungen unendlich gross sind, höchstens eine Menge »erster Art» bilden. Unter ein Menge »erster Art» wird jede Menge verstanden, deren successive abgeleitete Mengen von einer bestimmten endlichen Ordnung ab verschwinden.

Unser Satz II$_a$ enthielt die Erweiterung von den Mengen »erster Art» auf alle »reduktibeln» Mengen. Unter »reduktibeln» Mengen verstehn wir — mit Herrn G. CANTOR — diejenigen, deren erste abgeleitete Menge abzählbar ist, oder, was dasselbe ist, diejenigen, deren successive abgelei-

tete Mengen von einer bestimmten Ordnung α ab verschwinden, wo α eine endliche oder eine überendliche Zahl der zweiten Zahlenklasse ist. (1)

Herr Cantor hat gezeigt, (2) dass alle Mengen erster Art und überhaupt alle reduktibeln Mengen abzählbar sind, während durchaus nicht alle abzählbaren Mengen reduktibel sind. Aus dem eben bewiesenen Satze IV geht nun hervor, dass nicht die Reduktibilität, sondern die Abzählbarkeit der Menge P in unserem Falle das Wesentliche ist. Und es ist bemerkenswert, dass der Satz IV, gerade weil er nur diese *wesentliche* Eigenschaft der Menge P enthält, sich einfacher hat beweisen lassen, als der Satz II_a, obwohl der letztere weniger umfassend und ganz und gar in jenem enthalten ist.

Als Anwendung des Satzes IV heben wir den Fall hervor, dass für die Menge P die Menge aller rationalen Zahlen genommen wird, die nach Cantor (Borchardt's Journal, B. 77, p. 258) abzählbar ist. Man erhält dann den Satz:

Wenn man von zwei stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss, dass die vorderen oberen Ableitungen (oder die vorderen unteren etc.) für alle irrationalen Werte von x endlich und einander gleich sind, so unterscheiden sich die Funktionen nur durch eine additive Konstante;

und weiter:

Eine stetige Funktion, die für alle irrationalen Werte von x den Differentialquotienten Null hat, ist eine Konstante.

Es folgt hieraus z. B. unmittelbar, dass für die Riemann'sche Funktion (3)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

nur eine einzige Funktion existiren kann, welche die charakteristischen Eigenschaften des Integrales

$$\int_0^x F(x)\,dx$$

---

(1) Acta Mathematica, B. 2, p. 409, Théorème B und C.

(2) Mathematische Annalen, B. 21, p. 53, Theorem II.

(3) *Ueber die Darstellbarkeit e. F. d. e. trigon. R.* Ges. Werke, p. 228.

hat, an der Stelle $x = 0$ zu verschwinden und an allen Stellen, wo $F(x)$ stetig ist, den Differentialquotienten $F'(x)$ zu besitzen. Denn $F'(x)$ ist jedenfalls für alle irrationalen Werte von x stetig, und damit ist bereits die Bedingung für die Anwendbarkeit der vorstehenden Sätze erfüllt. Ueberhaupt dürfte der Satz IV weitaus für die meisten Fälle hinreichen, wo man sonst auf den schwerfälligen Satz II_a (resp. die bereits früher bekannten Analoga desselben) angewiesen war.

§ 2.

Die Frage, deren Beantwortung wir eingangs als das Ziel unserer Untersuchungen hingestellt haben, lautete: In welchem Umfange muss die Gleichung $D^+F(x) - D^+f(x) = 0$ erfüllt sein, damit der Schluss $F(x) - f(x) = const.$ gezogen werden darf?

Diese Frage würde als vollständig beantwortet anzusehn sein, wenn sich im Anschluss an den Satz IV Folgendes nachweisen liesse: Bedeutet P eine im Intervall x_0x_1 beliebig gegebene Menge von Werten x, deren Mächtigkeit *höher, als diejenige der abzählbaren Mengen ist*, so existiren immer stetige Funktionen $\phi(x)$, welche nicht im ganzen Intervall x_0x_1 constant sind und dennoch an allen Stellen, die nicht zur Menge P gehören, den Differentialquotienten Null besitzen.

Der Nachweis der Existenz solcher Funktionen $\phi(x)$ ist uns indes nicht in voller Allgemeinheit, sondern nur unter der Voraussetzung gelungen, dass die Menge P entweder selbst »*perfekt*« ist oder doch einen »*perfekten*« Bestandteil enthält. Die von uns aufgeworfene Frage wird also im Folgenden nicht vollständig erledigt; denn es bleibt der Fall übrig, dass die Menge P von höherer als der ersten Mächtigkeit ist, ohne einen perfekten Bestandteil zu enthalten. Freilich ist es zweifelhaft, ob solche Mengen überhaupt vorkommen können; Beispiele dieser Art dürften wenigstens bisher nicht bekannt sein. Sollte es sich daher in der weiteren Entwickelung der Mengenlehre herausstellen, dass wirklich jede Punktmenge, deren Mächtigkeit höher als diejenige der abzählbaren Mengen ist, einen perfekten Bestandteil enthält, so würde damit gleichzeitig der letzte Schritt zur Beantwortung unserer Frage gethan sein.

Bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Theorie muss jedenfalls die Bedingung, dass die nicht abzählbare Menge P einen perfekten Bestandteil enthalten solle, ausdrücklich angegeben werden.

Eine »*perfekte*» Menge ist nach der Definition von Herrn CANTOR eine solche, welche ihrer ersten abgeleiteten Menge gleich ist. Sie wird allgemein gegeben vermittelst einer endlichen oder unendlichen Reihe von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$, die so gewählt sein müssen, dass sie einander sämmtlich ausschliessen und auch nicht mit ihren Endpunkten an einander stossen. Es bilden nämlich bei beliebiger Annahme solcher Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ diejenigen Punkte, welche im Inneren keines einzigen Intervalles liegen, stets eine perfekte Menge, und umgekehrt lässt sich zu jeder anderswie definirten perfekten Menge eine Reihe von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ bestimmen, von denen die Menge in der angegebenen Weise abhängt.

Eine perfekte Menge wird beispielsweise gebildet durch die Gesammtheit aller derjenigen Zahlen, die sich als endliche oder unendliche Decimalbrüche so schreiben lassen dass die Ziffer 5 nicht vorkommt. Die Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ sind in diesem Falle, wenn wir nur die Strecke von 0 bis 1 berücksichtigen, folgendermassen durch ihre Anfangspunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und ihre Endpunkte $\xi_1', \xi_2', \ldots$ gegeben. Erstere sind die sämmtlichen endlichen Decimalbrüche, die mit einer 5 abschliessen, ohne dass eine solche schon vorher auftritt; letztere entstehn aus den ersteren, indem man die 5 in eine 6 verwandelt. Die $\xi_1, \xi_2, \ldots$, welche als Anfangspunkte der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ noch zu der perfekten Menge gehören, erfüllen die in der Definition gestellte Forderung, keine 5 zu enthalten, wenn man 499... statt 5 schreibt.

Es sei nun zwischen x_0 und x_1 eine beliebige perfekte Menge P gegeben. Wir stellen uns die Aufgabe, eine durchaus stetige Funktion zu bilden, die, ohne im ganzen Intervall konstant zu sein, doch nur an Punkten der gegebenen Menge P einen von Null verschiedenen Differentialquotienten besitzt.

Ist die Menge P in irgend einem Intervall der Strecke x_0x_1 »überall dicht», so füllt sie dieselbe, da sie perfekt ist, stetig aus. In diesem Falle liegt die Lösung unserer Aufgabe auf der Hand. Wir nehmen also an, die Menge P sei in keinem Intervalle »überall dicht», eine Eigenschaft, welche unter anderen auch der vorher als Beispiel angeführten Menge zukommt.

Unter dieser Annahme ist die gestellte Aufgabe für einige specielle Mengen bereits in unseren Untersuchungen über Rectification, ganz allgemein aber von Herrn CANTOR (Acta Mathematica, T. 4, p. 385) gelöst. Wir geben im Folgenden ein Verfahren, welches vielleicht etwas anschaulicher als dasjenige von CANTOR ist und überdies für die im nächsten § folgenden Anwendungen einige Vorteile bietet.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir die Anfangs- und Endpunkte der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$, durch welche die perfekte Menge P bestimmt ist, resp. mit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und $\xi'_1, \xi'_2, \ldots$. Die i_ν, ξ_ν, ξ'_ν bilden *unendliche* Reihen, da sonst die Menge P ganze Intervalle stetig ausfüllen würde. Wir denken uns diese Reihen auf irgend eine Weise geordnet, z. B. nach der Länge der Intervalle i_ν und im Falle der Gleichheit mehrerer Längen nach der Grösse der entsprechenden ξ_ν. Jedem Intervalle i_ν ordnen wir zwei andere i'_ν und i''_ν zu, indem wir mit i'_ν dasjenige der $\nu - 1$ vorhergehenden Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_{\nu-1}$ bezeichnen, welches dem i_ν zunächst links liegt, mit i''_ν dasjenige, welches dem i_ν zunächst rechts liegt; resp. jedesmal, wenn i_ν das am weitesten links gelegene der ν Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ ist, mit i'_ν den Punkt x_0, und wenn i_ν das am weitesten rechts gelegene Intervall ist, mit i'_ν den Punkt x_1.

Die Funktion $\phi(x)$ definiren wir nun der Reihe nach für die einzelnen Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ folgendermassen. Die Werte $\phi(x_0)$ und $\phi(x_1)$ werden willkürlich, aber von einander verschieden angenommen. Für alle Punkte des Intervalles i_1 (einschliesslich ξ_1 und ξ'_1) sei

$$\phi(x) = \phi(i_1) = \frac{1}{2}[\phi(x_0) + \phi(x_1)],$$

und allgemein für die Punkte des intervalles i_ν (einschliesslich ξ_ν und ξ'_ν)

$$\phi(x) = \phi(i_\nu) = \frac{1}{2}[\phi(i'_\nu) + \phi(i''_\nu)].$$

Jeder Wert x, der in keinem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ liegt, hat die Eigenschaft, dass in jeder Nähe desselben unendlich viele jener Intervalle liegen; denn die gegebene perfekte Menge ist nach Voraussetzung in keiner Strecke »überall dicht». Wir ordnen jedem derartigen Werte von x eine unendliche Reihe von Intervallen $i^x_1, i^x_2, \ldots$ zu, indem wir $i^x_1 = i_1$ setzen und allgemein $i^x_{\nu+1}$ als das erste Intervall der Reihe $i_1, i_2, \ldots$ definiren,

welches zwischen i_ν^x und x liegt. Dann ist offenbar $x = \lim_{\nu=\infty} \xi_\nu^x = \lim_{\nu=\infty} \xi_\nu'^x$, und wir definiren nun $\varphi(x)$ durch die Gleichung $\varphi(x) = \lim_{\nu=\infty} \varphi(i_\nu^x)$. Dass nämlich der Grenzwert auf der rechten Seite existirt, folgt daraus, dass die Differenz $\varphi(i_{\nu+1}^x) - \varphi(i_\nu^x)$ für alle Werte von ν dasselbe Vorzeichen hat.

Die Funktion $\varphi(x)$ ist jetzt für alle Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ eindeutig definirt. Wir beweisen — was übrigens, wenn man die Curve $y = \varphi(x)$ betrachtet, direkt aus der Anschauung folgt —, dass $\varphi(x)$ durchaus stetig ist. Nach beliebiger Annahme der Zahl n kann nämlich eine Zahl m_n jederzeit so bestimmt werden, dass die Strecke $x_0 x_1$ durch die Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m_n}$ und $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_{m_n}'$ in Intervalle geteilt wird, in deren jedem die Differenz zwischen Anfangs- und Endwert von $\varphi(x)$ höchstens gleich $\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{2^n}$ ist. Denn angenommen, es wäre zu der Zahl n eine solche Zahl m_n bestimmt, so brauchen wir m_{n+1} nur so gross anzunehmen, dass zwischen je zweien der Intervalle $x_0, i_1, i_2, \ldots, i_{m_n}, x_1$ mindestens eins der Intervalle $i_{m_n+1}, i_{m_n+2}, \ldots, i_{m_{n+1}}$ liegt. Dann wird nämlich für jede neu entstandene Teilstrecke die Differenz zwischen Anfangs- und Endwert nach der Definition der Funktion $\varphi(x)$ höchstens halb so gross, als für die ursprünglichen Teilstrecken, d. h. höchstens gleich $\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{2^{n+1}}$ sein. Es wird also, da für $n = 1$ offenbar $m_n = 1$ gesetzt werden darf, in der That für jedes n die Zerlegung der Strecke $x_0 x_1$ in Teilstrecken möglich sein, in deren jeder die Differenz zwischen Anfangs- und Endwert der Funktion $\varphi(x)$ höchstens gleich $\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{2^{n+1}}$ ist. Hieraus folgt unmittelbar die Stetigkeit von $\varphi(x)$, wenn noch berücksichtigt wird, dass diese Funktion durchaus monoton ist und daher in jedem Intervall nur solche Werte annehmen kann, die zwischen dem Anfangs- und Endwerte liegen.

Die Funktion $\varphi(x)$ erfüllt, wie wir jetzt erkennen, alle gestellten Forderungen: *sie ist stetig, ist nicht im ganzen Intervall $x_0 x_1$ constant und besitzt an allen Stellen, die nicht zu der gegebenen perfekten Menge P gehören, den Differentialquotienten Null. Hiermit ist allgemein nachgewiesen, dass der Schluss $F(x) - f(x) = const.$ unstatthaft wird, sobald die Gesammtheit der Stellen, für welche die Gültigkeit der Gleichung $DF(x) - Df(x) = 0$*

(oder auch der Gleichung $F'(x) - f'(x) = 0$) nicht nachweisbar ist, als Bestandteil eine perfekte Menge P enthält; denn legen wir bei der Bildung der Funktion $\phi(x)$ eben diese Menge P zu Grunde, so ist auch unter der Annahme $F(x) - f(x) = \phi(x)$ die Gleichungen $DF(x) - Df(x) = 0$ (resp. $F'(x) - f'(x) = 0$) in dem geforderten Umfang erfüllt.

Hat die perfekte Menge P einen von 0 verschiedenen Inhalt $\mathfrak{J}$, d. h. ist die Summe der Längen der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ kleiner als $x_1 - x_0$, so kann man mit Cantor einfacher

$$\phi(x) = \mathfrak{J}(x) = (x - x_0) - \sum_{(x_0)}^{(x)} i_\nu$$

setzen, wo die Summe sich auf alle diejenigen Intervalle i_ν resp. Bestandteile solcher Intervalle erstreckt, welche sich zwischen x_0 und x befinden. Diese Funktion hat die Eigentümlichkeit, dass der Wert des Quotienten $\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$ für alle Werte von x und h zwischen 0 und 1 liegt, dass also keine der 4 Ableitungen D^+, D_+, D^-, D_- jemals kleiner als 0 oder grösser als 1 wird. *Hieraus folgt, dass wenn die Gesammtheit der Stellen, für welche die Gültigkeit der Gleichung $DF(x) - Df(x) = 0$ (resp. $F'(x) - f'(x) = 0$) nicht nachweisbar ist, als Bestandteil eine perfekte Menge mit von Null verschiedenem Inhalt besitzt, der Schluss $F(x) - f(x) = 0$ selbst dann unzulässig bleibt, wenn man von den Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ ausserdem noch weiss, dass ihre Ableitungen durchweg unter einer bestimmten endlichen Grenze liegen sollen.*

§ 3.

Wir wollen aus den im vorigen § angestellten Betrachtungen einige weitere Schlüsse ziehn. Zu dem Zwecke brauchen wir folgenden

Hülfssatz aus der Mengenlehre. Es sei P eine beliebige perfekte Menge, welche in keinem Intervall überall dicht ist, R eine beliebige abzählbare Menge. Subtrahirt man von allen Elementen der Menge P eine Konstante a, so entsteht eine aus den Werten $x - a$ gebildete neue Menge P_a. Es lässt sich dann die Konstante a zwischen beliebig gegebenen Grenzen immer so bestimmen, dass die Menge P_a keinen einzigen Wert der Menge R enthält.

Beweis.

Wir bezeichnen wieder die Reihe der für die perfekte Menge P charakteristischen Intervalle in bestimmter Ordnung mit $i_1, i_2, \ldots$, die Anfangspunkte mit $\xi_1, \xi_2, \ldots$, die Endpunkte mit $\xi'_1, \xi'_2, \ldots$; die Elemente der abzählbaren Menge R seien, ebenfalls in bestimmter Ordnung, $x_1, x_2, x_3, \ldots$; c_1 und c'_1 $(c'_1 > c_1)$ seien die willkürlich gegebenen Grenzen, zwischen denen die Konstante a liegen soll. Wir betrachten nun das Intervall von $x = x_1 + c_1$ bis $x = x_1 + c'_1$. Entweder ist dieses Intervall gänzlich in einem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ enthalten resp. fällt mit einem solchen zusammen, in diesem Falle setzen wir $c_2 = c_1$, $c'_2 = c'_1$; oder es giebt unter den Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ solche, die sammt ihren Grenzen ganz und gar im Innern der Strecke $(x_1 + c_1,\ x_1 + c'_1)$ liegen, in diesem Falle setzen wir, wenn i_{k_1} das erste derartige Intervall der Reihe $i_1, i_2, \ldots$ ist, $c_2 = \xi_{k_1} - x_1$, $c'_2 = \xi'_{k_1} - x_1$. (1) Wir betrachten nun zweitens das Intervall von $x = x_2 + c_2$ bis $x = x_2 + c'_2$. Auch dieses Intervall ist entweder gänzlich in einem der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ enthalten resp. fällt mit einem solchen zusammen, in diesem Falle setzen wir $c_3 = c_2$, $c'_3 = c'_2$; oder es giebt unter den Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ solche, die sammt ihren Grenzen ganz und gar im Inneren der Strecke $(x_2 + c_2,\ x_2 + c'_2)$ liegen, in diesem Falle setzen wir, wenn i_{k_2} das erste derartige Intervall der Reihe $i_1, i_2, \ldots$ ist, $c_3 = \xi_{k_2} - x_2$, $c'_3 = \xi'_{k_2} - x_2$. Durch Fortsetzung dieses Processes erhalten wir zwei unendliche Reihen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ und $c'_1, c'_2, c'_3, \ldots$ von der Art, dass für jedes ν $c'_\nu > c_\nu$ und ausserdem entweder gleichzeitig $c_{\nu+1} > c_\nu$ und $c'_{\nu+1} < c'_\nu$ oder gleichzeitig $c_{\nu+1} = c_\nu$ und $c'_{\nu+1} = c'_\nu$ ist. Die Elemente beider Reihen haben daher für $\nu = \infty$ bestimmte Grenzwerte c und c', und zwar wird in dem Falle, dass $c = c'$ ist, diese Grösse *grösser* als *alle* c_ν und *kleiner* als *alle* c'_ν sein. Nehmen wir jetzt die Konstante a zwischen c und c' an, resp. gleich c und c', falls diese beiden Grössen einander gleich sind, so ist diese Konstante unter allen Umständen grösser als *alle* c_ν und kleiner als *alle* c'_ν, d. h. es werden alle

(1) Ein dritter Fall kann nicht eintreten; denn wenn unter den Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ sich ein solches befindet, dessen einer Endpunkt mit einem der Punkte $x_1 + c_1$ oder $x_1 + c'_1$ zusammenfällt, während der andere Endpunkt zwischen diesen beiden Stellen liegt, so giebt es immer auch solche Intervalle i_ν, die mit ihren beiden Endpunkten ganz und gar im Inneren der Strecke $(x_1 + c_1,\ x_1 + c'_1)$ liegen.

Grössen $c_\nu - a$ negativ und alle Grössen $c'_\nu - a$ positiv. Nun sind für jeden Wert von ν alle inneren Punkte der Strecke von $x = x_\nu + c_{\nu+1}$ bis $x = x_\nu + c'_{\nu+1}$ zugleich innere Punkte eines der für die Menge P charakteristischen Intervalle $i_1, i_2, \ldots$; alle inneren Punkte der Strecke von $x = x_\nu + c_{\nu+1} - a$ bis $x = x_\nu + c'_{\nu+1} - a$ sind folglich zugleich innere Punkte eines der für die Menge P_a charakteristischen Intervalle; es wird also auch der Punkt x_ν selbst im Inneren eines der für die Menge P_a charakteristischen Intervalle liegen, d. h. nicht zur Menge P_a gehören. W. z. b. w.

Aus dem eben bewiesenen Satze geht z. B. hervor, dass es perfekte Mengen giebt, die nur aus irrationalen Werten bestehn; denn die rationalen Zahlen bilden eine abzählbare Menge R, und wir erhalten daher eine Menge von der gewünschten Art durch Verminderung aller Elemente einer beliebig gegebenen perfekten Menge P (die nur in keinem Intervall überall dicht sein darf) um eine geeignete Konstante a.

Verbinden wir diese Resultate mit denjenigen des vorhergehenden §, so ergiebt sich Folgendes:

Ist $\phi(x)$ irgend eine stetige Funktion von der im vorigen § angegebenen Art, d. h. eine solche, die, ohne durchaus konstant zu sein, doch an allen Stellen mit Ausnahme der perfekten Menge P den Differentialquotienten Null hat, so lässt sich eine Konstante a zwischen zwei beliebigen Grenzen c_1 und c'_1 so bestimmen, dass die Funktion $\phi(x + a)$ jedenfalls an allen Stellen, die zu der willkürlich gegebenen abzählbaren Menge R gehören, den Differentialquotienten Null besitzt.

Insbesondere gilt der Satz wenn man für R die Menge aller rationalen Zahlen nimmt.

Legt man eine perfekte Menge P mit von Null verschiedenem Inhalt $\mathfrak{J}$ zu Grunde und setzt $\phi(x) = \mathfrak{J}(x)$, so hat die Funktion $\phi(x + a)$ überdies die Eigenschaft, an allen Stellen durchaus endliche Ableitungen zu besitzen, da allgemein $0 \leqq \frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} \leqq 1$ ist.

Ist daher zwischen zwei stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ die Relationen $DF(x) - Df(x) = 0$ resp. $F'(x) - f'(x) = 0$ nur für eine abzählbare Menge von Punkten, etwa für alle rationalen Werte von x, nachgewiesen, so darf man nicht schliessen, dass $F(x) - f(x) = const.$ sei, selbst dann nicht, wenn man von den Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ ausserdem noch weiss, dass ihre Ableitungen überall unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze

liegen; denn alle diese Bedingungen werden auch für $F(x) - f(x) = \phi(x+a)$ erfüllt.

Wir wollen den Fall, dass R die Menge aller rationalen Zahlen bedeutet, noch etwas näher ins Auge fassen. Nimmt man bei der im vorigen § angegebenen Konstruktion der Funktion $\phi(x)$ für $\phi(x_0)$ und $\phi(x_1)$ rationale Werte an, so wird die Funktion überhaupt an allen nicht zur Menge P gehörigen Stellen rationale Werte besitzen. Die Funktion $\phi(x+a)$ wird also für alle rationalen x selbst rational sein. Man erhält für jedes gegebene rationale $x = x_\nu$ den Wert von $\phi(x_\nu + a)$ durch eine *endliche* Anzahl von Operationen, was wir ausdrücklich hervorheben. Denn nachdem die Lage und Reihenfolge der Intervalle $i_1, i_2, \ldots$, die Reihenfolge aller rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots$, und die Werte der beiden Konstanten c_1 und c_1' einmal festgesetzt sind (übrigens willkürlich), braucht man nur die ν Intervalle $i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots, i_{k_\nu}$ nach einander zu bestimmen und $\phi(i_{k_\nu})$ zu berechnen; dann ist offenbar $\phi(x_\nu + a) = \phi(i_{k_\nu})$.

Es ist hiernach möglich, der Menge aller rationalen Werte $x_1, x_2, \ldots$ rationale Werte $y_1, y_2, \ldots$ so zuzuordnen, dass zu jedem x_ν das entsprechende y_ν durch eine endliche Anzahl von Operationen gefunden wird, und dass zugleich die Gesammtheit der Werte y eine stetige Funktion von x darstellt, deren Differentialquotient an allen rationalen Stellen gleich Null ist.

§ 4.

Die irrationalen Zahlen werden von einigen Mathematikern aus dem Gebiete der Analysis ausgeschlossen. Da indes die gewöhnlichen Methoden, welche bei Begründung der Principien der Integralrechnung angewendet zu werden pflegen, wesentlich auf Heranziehung irrationaler Zahlen beruhen, wird durch die Ausschliessung derselben eine neue Prüfung jener Principien notwendig. Für diesen Zweck sind die in dem vorhergehenden Paragraphen angestellten Untersuchungen von Wichtigkeit.

In einer Theorie, welche sich auf Betrachtung rationaler Werte des Arguments beschränkt, ist zunächst dem gewöhnlichen Stetigkeitsbegriff vorweg die Bedeutung der *gleichmässigen Stetigkeit in jedem beliebigen Intervall* beizulegen. Denn sonst würde man z. B. eine Funktion, die für

$x < \sqrt{3}$ gleich 0, für $x > \sqrt{3}$ gleich 1 ist, *stetig* nennen müssen, da dieselbe in der That für alle rationalen x stetig ist, ohne freilich in jedem Intervall *gleichmässig* stetig zu sein.

Die in dem vorigen Paragraph angestellten Untersuchungen zeigen nun aber weiter, dass auch der gewöhnliche Begriff der *Differentiirbarkeit* einer Funktion für viele Zwecke unzureichend ist und einer weiteren Bestimmung bedarf, sobald man das Argument beschränkt.

Für die Lösung aller Probleme, welche von der Integration von Differentialgleichungen abhängen, ist nämlich der Satz wesentlich, dass aus der allgemeinen Gültigkeit der Gleichung $f'(x) = 0$ der Schluss $f(x) = \text{const.}$ gezogen werden darf, wenn $f(x)$ stetig angenommen wird. Dieser Satz wird aber nach § 3 bei Beschränkung auf rationale Argumente hinfällig. Die Hinzufügung der Forderung, dass der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sich für alle Werte von x und h unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze halten solle (d. h. im Wesentlichen, dass der Differentialquotient auch für alle irrationalen x endlich bleibe), würde nichts ändern; denn wir haben gesehn, dass es auch solche Funktionen giebt, welche, ohne durchaus konstant zu sein, für alle rationalen x den Differentialquotienten Null besitzen und überdies ganz allgemein die Relation $0 \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < 1$ erfüllen.

Man könnte, um über diese Schwierigkeit hinwegzukommen, für die Funktion $f(x)$ vorweg eine bestimmte Form, etwa die Form einer Potenzreihe, annehmen. Eine solche Annahme würde jedoch in vielen Fällen, besonders bei Problemen der angewandten Mathematik, willkürlich und darum unzulässig erscheinen müssen.

Ein besseres Auskunftsmittel gewinnt man durch Einführung eines neuen Begriffes anstatt des gewöhnlichen Begriffes der *Differentiirbarkeit* einer Funktion.

Eine Funktion $f(x)$ heisse »*in einem Intervalle i gleichmässig differentiirbar*«, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse δ immer eine Grösse h so bestimmt werden kann, dass die Relation

$$\left| \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - \frac{f(x'')-f(x)}{x''-x} \right| < \delta$$

für alle dem Intervall i angehörigen Werte von x, x', x'' erfüllt ist, welche den Bedingungen $|x'-x|<h$ und $|x''-x|<h$ genügen. (1)

Man erkennt leicht, dass, wenn man die Funktion $f(x)$ nicht nur gleichmässig stetig, sondern auch gleichmässig differentiirbar annimmt, der Schluss von der Gleichung $f'(x)=0$ auf die Gleichung $f(x)=const.$ auch bei Beschränkung auf rationale Werte des Arguments noch zulässig ist. Ja er bleibt selbst dann noch gültig, wenn von dem Gebiete der gleichmässigen Differentiirbarkeit gewisse Stellen ausgeschlossen sind, die in ihrer Gesammtheit eine reduktible Menge (2) bilden, in der Art, dass die Funktion nur in denjenigen Intervallen gleichmässig differentiirbar angenommen wird, welche keinen solchen Punkt enthalten und auch nicht an einen solchen grenzen. Man kann in diesem Falle kurz sagen, die Funktion sei *nach Ausschluss einer reduktibeln Punktmenge gleichmässig differentiirbar.*

Wir gewinnen also folgendes Resultat: *Bei Beschränkung auf rationale Argumente ist das durch die gewöhnlichen Schlüsse gewonnene Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung, welches eine willkürliche Konstante enthält, nur dann als das vollständige anzusehn, wenn man von der unbekannten Funktion ausser der Erfüllung der Differentialgleichung noch verlangt, dass sie gleichmässig stetig und nach Ausschluss höchstens einer reduktibeln Punktmenge gleichmässig differentiirbar sei. Lässt man eine dieser Forderungen fallen, so giebt es noch andere Integrale der gegebenen Differentialgleichung.*

Meran, April 1884.

---

(1) Auf den Begriff der »*gleichmässigen Differentiirbarkeit*» ist Verf. gesprächsweise von Herrn Prof. KRONECKER hingewiesen worden.

(2) Cf. § 1.

SUR QUELQUES CONSÉQUENCES ARITHMÉTIQUES
DES FORMULES
DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

CH. HERMITE

À PARIS.

(Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de St Pétersbourg. T. 29.)

Dans les Comptes-rendus de l'Académie de Berlin de 1875 [1] M. KRONECKER a donné des propositions d'une grande importance que j'ai pour objet d'établir dans cette note, en me plaçant à un point de vue bien différent de celui de l'illustre géomètre. Posons avec les notations de l'auteur:

$$\vartheta_0(q) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots$$
$$\vartheta_2(q) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \dots$$
$$\vartheta_3(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

et désignons par $F(n)$ le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-n$ dont un au moins des coefficients extrêmes est impair, avec la convention d'écrire $F(n) - \frac{1}{2}$ au lieu de $F(n)$, lorsque n est un carré. Les théorèmes dont je vais m'occuper, consistent dans les relations suivantes

$$\text{(A)} \qquad 4\sum_0^\infty F(4n+2)q^{n+\frac{1}{2}} = \vartheta_2^2(q)\vartheta_3(q),$$

$$\text{(B)} \qquad 4\sum_0^\infty F(4n+1)q^{n+\frac{1}{4}} = \vartheta_2(q)\vartheta_3^2(q),$$

$$\text{(C)} \qquad 8\sum_0^\infty F(8n+3)q^{2n+\frac{3}{4}} = \vartheta_2^3(q),$$

[1] *Über quadratische Formen von negativer Determinante*, p. 223.

qui révèlent une liaison étroite entre la théorie arithmétique des formes quadratiques et la théorie analytique des transcendantes elliptiques. Deux voies s'offrent pour conduire à ces beaux résultats, l'une qui les a fait découvrir, est celle de M. KRONECKER; elle part de la considération des modules singuliers qui donnent lieu à la multiplication complexe. Une seconde que j'ai indiquée succinctement dans une lettre adressée à M. LIOUVILLE,(1) repose plus sur l'analyse que sur l'arithmétique, la notion de classe s'y trouvant amenée par la considération des formes réduites. Elle m'a donné déjà la démonstration de l'équation (C); je me propose maintenant d'en tirer d'une manière plus directe cette même relation, et aussi d'établir les théorèmes (A) et (B) qui sont du plus grand intérêt. J'exposerai ensuite comme conséquence de cette méthode, quelques expressions des sommes $\sum_0^n F(4n+2)$, $\sum_0^n F(4n+1)$, $\sum_0^n F(8n+3)$, où l'on verra une nouvelle application de la fonction $E(x)$, représentant l'entier contenu dans x, qui a été récemment l'objet de plusieurs communications importantes de M. BOUNIAKOWSKY.

I.

La représentation des différentes classes de formes de déterminant négatif, s'obtient par des formes particulières auxquelles on donne le nom de réduites, et qui sont caractérisées de la manière suivante.

Désignons les par (A, B, C), et soit ε une quantité du signe de B, et égale en valeur absolue à l'unité; on aura les conditions:

$$A \leqq C, \qquad 2\varepsilon B \leqq A.$$

Mais faisons pour plus de précision la distinction entre les formes non ambigues et les formes ambigues. Les premières seront $(A, +B, C)$, en supposant B positif, différent de zéro, et excluant les cas d'égalité dans les conditions précédentes qui deviennent:

$$A < C, \qquad 2B < A.$$

(1) *Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique.* Journal de M. LIOUVILLE, année 1862, p. 25.

Les autres ensuite seront de ces trois espèces:

$$(A,\ 0,\ C) \qquad A < C,$$
$$(2B,\ B,\ C) \qquad 2B < C,$$
$$(A,\ B,\ A) \qquad 2B < A,$$

et c'est seulement quand le déterminant changé de signe est un carré ou le triple d'un carré, qu'on doit prendre:

$$A = C, \quad \text{ou bien} \quad 2B = C,\ 2B = A.$$

Cette notion des formes réduites doit recevoir une modification légère en vue des recherches qui vont suivre, où nous considérerons exclusivement les formes dans lesquelles l'un au moins des coefficients extrêmes est impair. ([1])

Convenons de désigner par a, a', a'', des nombres impairs, par b, b', des nombres pairs; elles se répartiront pour un déterminant impair, dans ces trois catégories:

$$\text{(I)}\ (a,\ b,\ a'), \qquad \text{(II)}\ (a,\ a',\ b), \qquad \text{(III)}\ (b,\ a',\ a),$$

et pour un déterminant pair dans les suivantes:

$$\text{(I)}\ (a,\ a'',\ a'), \qquad \text{(II)}\ (a,\ b',\ b), \qquad \text{(III)}\ (b,\ b',\ a).$$

Supposons maintenant ces formes réduites et admettons que les coefficients moyens soient positifs; je les ramenerai, comme on va voir, au premier type. En raisonnant, pour fixer les idées dans le premier cas, j'effectue la substitution au déterminant -1,

$$x = X + Y, \qquad y = -Y$$

dans la forme (II). Elle devient:

$$(a,\ a - a',\ a - 2a' + b)$$

et par conséquent du type (I) mais le coefficient moyen qui reste positif,

---

([1]) Ce sera par conséquent l'ordre proprement primitif et ses dérivés lorsque le déterminant sera impair ou le double d'un nombre impair, seuls cas qui s'offrent dans les théorèmes de M. Kronecker.

franchit la limite caractéristique des réduites. Il est en effet l'un des termes de la suite:

$$a-k,\quad a-k+2,\quad a-k+4,\ \ldots,\ a-1,$$

où k désigne le plus grand nombre impair contenu dans $\frac{a}{2}$. Toutefois le dernier coefficient ne cesse pas de satisfaire à la condition: $a-2a'+b>a$, puisqu'on doit supposer: $2a'<b$. Le même résultat s'obtenant à l'égard de la forme (III), qui est improprement équivalente à $(a,\ a',\ b)$ et par suite proprement équivalente à: $(a,\ a-a',\ a-2a'+b)$, nous avons cette conclusion, que toutes les classes de déterminant impair, sont représentées par les formes du type (I), $(A,\ \pm B,\ A')$ où l'on supposera:

$$B=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ A-1,\quad \text{et:}\quad A\leqq A'.$$

Quant aux formes ambigues, deux cas sont à distinguer, suivant que le déterminant est $\equiv 1$, ou $\equiv 3 \pmod 4$. Dans le premier il n'existe que la seule espèce $(A,\ 0,\ A')$, A n'étant jamais égal à A'; mais dans le second cas, les formes ambigues sont d'une part: $(A,\ 0,\ A')$ avec la condition $A<A'$, puis: $(A,\ B,\ A)$ en prenant:

$$B=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ A-1.$$

On établira de la même manière, en considérant les déterminants pairs, que les formes non ambigues se ramènent au premier type: $(A,\ \pm A'',\ A')$, où l'on doit supposer

$$A''=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ A-2,\quad \text{et:}\quad A<A';$$

les formes ambigues sont ensuite:

$(A,\ A,\ A')$, avec l'inégalité: $A<A'$

puis: $(A,\ A'',\ A)$, en prenant encore:

$$A''=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ A-2.$$

Cette seconde catégorie ne se présente d'ailleurs que lorsque le déterminant supposé pair est divisible par 8.

Nous avons exclu dans ce qui précède, les formes de l'ordre improprement primitif, et des dérivées de cet ordre, nous ajouterons à leur égard, pour les déterminants $\equiv 5 \pmod 8$, la remarque suivante. Ces

formes pour de tels déterminants, sont du type $(2a, a'', 2a')$; en supposant a'' positif, elles seront réduites sous les conditions:

$$a'' \leqq a, \qquad a \leqq a'.$$

Admettons maintenant que le coefficient moyen soit l'un des termes de la suite:

$$a'' = 1, 3, 5, \ldots, 2a - 1,$$

les formes obtenues en prenant:

$$a'' = a + 2, a + 4, \ldots, 2a - 1$$

ne seront plus réduites mais elles le deviendront par la substitution précédemment employée:

$$x = X + Y, \qquad y = -Y.$$

En effet dans la transformée obtenue:

$$(2a, 2a - a'', 2a - 2a'' + 2a')$$

les conditions caractéristiques:

$$2a - a'' < a, \qquad 2a - a'' < a - a'' + a'$$

sont satisfaites, puisqu'elles reviennent à celles-ci:

$$a < a'', \qquad a < a'.$$

Toutefois il sera nécessaire, quand on aura:

$$a - a'' + a' < a, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a' < a''$$

d'employer en outre la substitution $X = Y'$, $Y = X'$. Soit maintenant:

$$a'' = a + b, \qquad a' = a + b',$$

faisons aussi:

$$a - b = a_1;$$

la transformée précédente devient:

$$(2a_1 + 2b, a_1, 2a_1 + 2b'),$$

les nouveaux éléments a_1, b, b', étant entièrement arbitraires. On voit ainsi que cette forme donne deux fois la série complète des réduites, à

savoir les réduites elles-mêmes, si l'on prend $b' > b$, puis leurs transformées par la substitution $X = Y'$, $Y = X'$, quand on suppose $b' < b$. Nous avons donc le résultat suivant dont nous ferons bientôt usage. Concevons que a, a', a'', parcourent la série des nombres impairs sous la condition:

$$a < a', \qquad a'' < 2a;$$

la forme: $(2a, a'', 2a')$ représentera d'une part, les formes ambigues, $(2a, a, 2a')$, puis celles-ci: $(2a, a', 2a')$, qui se ramènent à: $(2a, 2a - a', 2a)$; c'est par conséquent la suite complète et sans répétition des formes ambigues. Il y a à excepter toutefois la supposition de $a = a'$, c'est-à-dire la forme dérivée de $(2, 1, 2)$, qui s'offre seulement lorsque N est le triple d'un carré. Elle représentera en second lieu, et répétée trois fois, la série des formes non ambigues, équivalentes proprement ou improprement aux formes réduites dont le coefficient moyen est positif.

II.

Le théorème (A) de M. Kronecker qui consiste dans l'égalité:

$$4\sum_0^\infty F(4n+2)q^{n+\frac{1}{2}} = \vartheta_2^2(q)\vartheta_3(q),$$

s'obtient au moyen de ces séries, où j'écris pour abréger:

$$\vartheta_0,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3, \quad \text{au lieu de} \quad \vartheta_0(q),\ \vartheta_2(q),\ \vartheta_3(q):$$

$$\vartheta_2\vartheta_3\frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \sum_0 {}_n \frac{4q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}\sin(2n+1)x,$$

$$\vartheta_2\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin x} + 4\sum_1 {}_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right]\sin(2n+1)x.$$

La première est le développement de $\frac{2kK}{\pi}\sin\frac{2Kx}{\pi}$, la seconde que j'ai donnée sans démonstration, (1) a été établie ainsi que d'autres de même nature dont je ferai usage, dans une excellente thèse de doctorat de M. Biehler, (2) à laquelle je renvoie. Multiplions les membre à membre, puis intégrons entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$, en employant les formules:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

On trouvera ainsi:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3 = 4S + 8S_1,$$

si l'on pose pour abréger:

$$S = \sum_0 {}_n \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n+1}}$$

$$S_1 = \sum_1 {}_n \frac{q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right].$$

Je développe maintenant ces expressions suivant les puissances de q en remplaçant $\frac{1}{1-q^{2n+1}}$ par $1 + q^{2n+1} + q^{2(2n+1)} + \ldots$, et j'obtiens d'abord:

$$S = \Sigma q^{\frac{1}{2}aa'},$$

où a et a' parcourent la série entière des nombres impairs. Soit ensuite:

$$a'' = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2a - 1,$$

et l'on aura:

$$S_1 = \Sigma q^{\frac{1}{4}(a^2+2aa'-a''^2)}.$$

---

(1) *Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques* (Comptes-rendus, Juillet 1862).

(2) *Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce* (Paris, Gauthier-Villars, 1879).

Désignant donc par N un nombre impair quelconque, et par $\varphi(N)$, le nombre de ses diviseurs, nous pouvons déjà écrire:

$$S = \sum \varphi(N) q^{\frac{1}{2}N}.$$

En passant à la seconde somme S_1, nous poserons:

$$a^2 + 2aa' - a''^2 = 2N,$$

de sorte que $2N$ sera le déterminant changé de signe de la forme quadratique $(a,\ a'',\ a + 2a')$. Cela étant, nous établissons que nous avons ainsi obtenu le type de nos nouvelles réduites pour un déterminant impairement pair, représenté par $(A,\ A'',\ A')$, en montrant que la différence $A - A'$ est nécessairement le double d'un nombre impair. Or on a:

$$AA' - A''^2 = 2N,$$

et par conséquent:

$$AA' \equiv 3 \pmod 4.$$

En multipliant par le nombre impair A', nous en conclurons:

$$A \equiv 3A' \pmod 4$$

d'où:

$$A - A' \equiv 2A' \pmod 4$$

comme il fallait le faire voir. Soit donc pour un moment: $f(2N)$ le nombre des classes non ambigues de déterminant $-2N$; il est clair qu'on obtient, puisqu'on exclut les valeurs négatives de A'':

$$S_1 = \sum \frac{1}{2} f(2N) q^{\frac{1}{2}N},$$

et le développement de $\vartheta_2^2\vartheta_3$ s'offre sous la forme suivante:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3 = 4\sum [\varphi(N) + f(2N)] q^{\frac{1}{2}N}.$$

Mais le nombre des classes ambigues de déterminant $-2N$ étant $\varphi(N)$, la somme $\varphi(N) + f(2N)$, est précisément la fonction $F(2N)$ de M. Kronecker, dont la proposition se trouve ainsi démontrée.

III.

Le second théorème de l'illustre géomètre se tire des séries suivantes:

$$\vartheta_2\vartheta_3 \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \frac{1}{\sin x} + \sum_0 {}_n \frac{4q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}} \sin(2n+1)x$$

$$\vartheta_3 \frac{\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = 2\sum_0 {}_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} [1 + 2q^{-1} + \ldots + 2q^{-n^2}] \sin(2n+1)x.$$

En les multipliant membre à membre, et intégrant entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$, on en déduit cette expression:

$$\vartheta_2\vartheta_3^2 = 2S + 4S_1,$$

où l'on a:

$$S = \sum_0 {}_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} [1 + 2q^{-1} + \ldots + 2q^{-n^2}],$$

$$S_1 = \sum_0 {}_n \frac{q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2n+1}}{1 - q^{2n+1}} [1 + 2q^{-1} + \ldots + 2q^{-n^2}].$$

Cela posé, désignons encore par a un nombre impair quelconque, et soit $b = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots, \pm(a-1)$, la première série prend cette nouvelle forme:

$$S = \sum q^{\frac{1}{4}(a^2-b^2)}$$

et l'on en conclut facilement:

$$S = \sum \varphi(N) q^{\frac{1}{4}N},$$

N parcourant la série des entiers impairs $\equiv 1 \pmod 4$. Soit en effet:

$$a^2 - b^2 = \delta\delta'$$

δ et δ' étant deux diviseurs conjugués de N; on aura nécessairement $\delta \equiv \delta' \pmod 4$, et les deux systèmes d'égalités:

$$a + b = \delta, \qquad a - b = \delta'.$$

ou bien:

$$a - b = \delta, \qquad a + b = \delta',$$

détermineront toujours pour a un nombre impair, et pour b un nombre pair, qui change de signe en passant de l'un à l'autre; le cas où N est un carré correspondant à $b = 0$.

La quantité S_1, développée suivant les puissances de q, donne ensuite:

$$S_1 = \Sigma\, q^{\frac14 (a^2 + 4ac - b^2)}$$

où l'on doit faire:

$$a = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

$$b = 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \ldots,\ \pm (a - 1),$$

$$c = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Soit maintenant:

$$a^2 + 4ac - b^2 = N;$$

on voit que N sera $\equiv 1 \pmod 4$, et représente le déterminant changé de signe de la forme $(a,\ b,\ a + 4c)$. Nous trouvons ainsi l'expression $(A,\ \pm B,\ A')$ que nous avons déjà considérée, car le produit AA' étant $\equiv 1 \pmod 4$, la différence $A' - A$ est un multiple de quatre. Or il a été établi que cette forme donne d'abord la série entière et sans répétition des réduites non ambigues, puis les formes ambigues de l'espèce $(A,\ 0,\ A')$, où l'on a: $A < A'$. C'est donc la totalité des diverses formes, moins celles qui sont représentées par $(A,\ B,\ A)$, en prenant:

$$B = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ A - 1.$$

Le nombre de ces dernières est pour une valeur donnée de N, le nombre des solutions de l'équation

$$A^2 - B^2 = N,$$

avec la condition que B soit positif. On doit donc comme tout-à l'heure poser en désignant par δ et δ' deux diviseurs conjugués de $4N$

$$A - B = \delta, \qquad A + B = \delta',$$

mais prendre maintenant $\delta' > \delta$, de sorte que le nombre cherché est $\frac{1}{2}\varphi(N)$, lorsque N n'est pas un carré. Dans ce dernier on obtient évidemment: $\frac{\varphi(N) - 1}{2} + 1$, ou bien: $\frac{\varphi(N) + 1}{2}$. De ce que nous venons d'établir résulte que si l'on désigne par $F(N)$ le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-N$, on obtient:

$$S_1 = \sum [F(N) - \tfrac{1}{2}\varphi(N)] q^{\frac{1}{4}N}$$

en convenant, lorsque N est un carré, de remplacer $F(N)$ par $F(N) - \frac{1}{2}$. Or on a trouvé:

$$S = \sum \varphi(N) q^{\frac{1}{4}N};$$

nous avons par conséquent:

$$\vartheta_2 \vartheta_3^2 = 4(S + 2S_1) = 4 \sum F(N) q^{\frac{1}{4}N}$$

comme il s'agissait de l'établir.

IV.

Le troisième théorème de M. Kronecker, exprimé par l'égalité:

$$8 \sum_0^{\infty} F(8n + 3) q^{2n + \frac{3}{4}} = \vartheta_2^3(q)$$

se conclut du développement:

$$\vartheta_2 \frac{\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \frac{2}{\sin 2x} + \sum \frac{8q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin 2nx$$

où il faut prendre:

$$n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

et de celui-ci

$$\vartheta_2 \frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = 4\sum q^{n^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right] \sin 2nx$$

dans lequel n parcourt la série des nombres entiers.

En opérant comme précédemment nous trouverons d'abord:

$$\vartheta_2^3 = 8(S + 2S_1),$$

où l'on a fait, en supposant $a = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$

$$S = \sum q^{a^2}\left[q^{-\frac{1}{2}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\right],$$

$$S_1 = \sum \frac{q^{a^2+2a}}{1-q^{2a}}\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\right].$$

La première suite pouvant s'écrire:

$$S = \sum q^{\frac{1}{4}(4a^2-a'^2)}$$

$$a' = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2a-1,$$

nous poserons $N = 4a^2 - a'^2$; ce sera un entier $\equiv 3 \pmod 8$, et nous désignerons par δ et δ' deux de ses diviseurs conjugués. Cela fait, soit:

$$2a - a' = \delta, \qquad 2a + a' = \delta';$$

ces conditions détermineront pour a et a' des entiers impairs, puisqu'on a: $\delta \equiv 3\delta' \pmod 8$, et en prenant $\delta < \delta'$, a' sera positif. Le coefficient de $q^{\frac{1}{4}N}$ sera ainsi la moitié du nombre des diviseurs de N, et nous écrirons:

$$S = \sum \tfrac{1}{2}\varphi(N)\, q^{\frac{1}{4}N}.$$

Le-développement de S_1 suivant les puissances de q étant:

$$S_1 = \sum q^{\frac{1}{4}(4a^2+4ab-a''^2)}$$

$$a = 1, 3, 5, \ldots; \; b = 2, 4, 6, \ldots; \; a'' = 1, 3, 5, \ldots, 2a - 1$$

ou bien:

$$S_1 = \sum q^{\frac{1}{4}(4aa'-a''^2)}$$

en posant:

$$a' = a + b.$$

Nous ferons:

$$N = 4aa' - a''^2,$$

ce sera donc encore un entier $\equiv 3 \pmod 8$, qui se présente comme le déterminant changé de signe de la forme $(2a, a'', 2a')$ et de ce que nous avons établi § I, à l'égard de ces formes, donne la conclusion suivante.

Soit pour des classes improprement primitives, (N) le nombre total des formes ambigues, $f(N)$ la moitié du nombre des classes non ambigues, le nombre des solutions de l'équation:

$$aa' - a''^2 = N$$

est: $(N) + 3f(N)$, en exceptant le seul cas où N est le triple d'un carré, la quantité précédente devant être alors diminuée d'une unité.

On a ainsi:

$$S_1 = \sum [(N) + 3f(N)] q^{\frac{1}{4}N};$$

or on sait que $(N) = \frac{1}{2}\varphi(N)$, de sorte qu'ayant obtenu:

$$S = \sum \frac{1}{2}\varphi(N) q^{\frac{1}{4}N} = \Sigma (N) q^{\frac{1}{4}N}$$

nous en déduisons:

$$S + 2S_1 = \sum 3[(N) + 2f(N)] q^{\frac{1}{4}N}$$

et par suite:

$$\theta_2^3 = 24 \sum [(N) + 2f(N)] q^{\frac{1}{4}N}.$$

Le procédé que je viens d'employer conduit comme on voit au nombre total des classes improprement primitives de déterminant $-N$, représenté par $(N) + 2f(N)$, celui que j'ai donné antérieurement, (Journal de Liouville, 1862, p. 25), fournissant sous la forme même qu'a obtenue M. Kronecker, l'équation:

$$\vartheta_2^3 = 8\sum F(N)\,q^{\frac{1}{4}N},$$

où $F(N)$ désigne le nombre des classes proprement primitives. Du rapprochement de ces deux expressions résulte donc la relation des *Disquisitiones Arithmeticae*

$$F(N) = 3[(N) + 2f(N)]$$

et dans le cas où N est le triple d'un carré:

$$F(N) = 3[(N) + 2f(N)] - 2.$$

M. Lipschitz a donné de la même relation, une démonstration arithmétique aussi simple qu'élégante dans son beau mémoire publié dans le T. 53 du Journal de Crelle: *Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.*

V.

Il me reste à indiquer des conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques dans lesquelles intervient la fonction $E(x)$; elles se tirent de la remarque suivante:

J'observe d'abord que si l'on pose:

$$f(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n + \ldots,$$

le développement suivant les puissances croissantes de la variable du quotient $\frac{f(x)}{1-x}$, donne la relation:

$$\frac{f(x)}{1-x} = A_0 + (A_0 + A_1)x + \ldots + (A_0 + A_1 + \ldots + A_n)x^n + \ldots$$

Cherchons pareillement le coefficient de x^n dans le développement de la quantité $\frac{f(x^a)}{1-x}$, où a désigne un nombre entier quelconque. Comme on peut écrire:

$$\frac{f(x^a)}{1-x} = \sum A_\mu x^{a\mu+\lambda},$$

$$\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

$$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

nous poserons la condition $a\mu + \lambda = n$, qui donne évidemment pour μ les valeurs: $0,\ 1,\ 2,\dots,\ E\left(\frac{n}{a}\right)$. Soit donc pour abréger l'écriture: $\nu = E\left(\frac{n}{a}\right)$, il est clair qu'on aura:

$$\frac{f(x^a)}{1-x} = \sum (A_0 + A_1 + \dots + A_\nu) x^n;$$

c'est la relation analytique que je vais employer, et je l'appliquerai d'abord en supposant $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Nous obtenons dans ce cas la formule suivante:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^a)} = \sum \left[1 + E\left(\frac{n}{a}\right)\right] x^n,$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Multiplions ensuite les deux membres par x^b, b désignant un entier positif, on en tire:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1-x^a)} = \sum \left[1 + E\left(\frac{n}{a}\right)\right] x^{n+b},$$

puis en changeant n en $n-b$:

$$\frac{x^b}{(1-x)(x-x^a)} = \sum \left[1 + E\left(\frac{n-b}{a}\right)\right] x^n.$$

On voit que dans cette nouvelle relation il est nécessaire de prendre $E\left(\frac{n-b}{a}\right) = 0$ lorsque $n-b$ est négatif; nous ferons désormais cette

convention, et en remarquant que: $1 + E(x) = E(x+1)$, nous écrirons plus simplement:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1-x^a)} = \sum E\left(\frac{n+a-b}{a}\right) x^n.$$

Il convient de joindre à cette formule celle qui donne le développement de la fraction $\dfrac{x^b}{(1-x)(1+x^a)}$, et qu'on obtient par l'identité:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)} = \frac{x^b(1-x^a)}{(1-x)(1-x^{2a})}.$$

Nous trouvons de cette manière:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)} = \sum \left[E\left(\frac{n+2a-b}{2a}\right) - E\left(\frac{n+a-b}{2a}\right)\right] x^n,$$

ce qui conduit à introduire une nouvelle fonction $E_1(x)$, definie par la condition:

$$E_1(x) = E\left(x+\frac{1}{2}\right) - E(x).$$

On a ainsi sous une forme plus simple:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)} = \sum E_1\left(\frac{n+a-b}{2a}\right) x^n.$$

Je me bornerai à remarquer à l'égard de la quantité $E_1(x)$, qu'elle est toujours égale à zéro lorsque la différence $x - E(x)$ est moindre que $\frac{1}{2}$, et à l'unité si l'on suppose $x - E(x) \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}$, c'est ce que montrent les relations:

$$E_1(x+1) = E_1(x),$$

$$E_1\left(x+\frac{1}{2}\right) = 1 - E_1(x),$$

$$E_1(x) = E(2x) - 2E(x).$$

J'appliquerai encore la formule:

$$\frac{f(x^a)}{1-x} = \Sigma\,(A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu)x^n$$

à un cas plus général en prenant: $f(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$, où k est un entier quelconque. Nous aurons alors:

$$A_n = \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n},$$

et l'on sait d'ailleurs que la somme: $A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu$ a pour valeur

$$\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+\nu)}{1.2\ldots\nu},\quad \text{ou bien:}\quad \frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}{1.2\ldots k}.$$

Il suffit donc pour obtenir le développement cherché de remplacer ν par $E\left(\frac{n}{a}\right)$ dans cette expression. Mais soit afin d'abréger l'écriture:

$$E_k(x) = \frac{E(x)E(x+1)\ldots E(x+k-1)}{1.2\ldots k},$$

on aura ainsi:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^a)^k} = \sum E_k\left(\frac{n+a}{a}\right)x^n,$$

puis en raisonnant comme plus haut:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1-x^a)^k} = \sum E_k\left(\frac{n+a-b}{a}\right)x^n.$$

Ce résultat établi, nous en tirons la formule relative à la fonction: $\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)^k}$, en la mettant sous la forme: $\frac{x^b(1-x^a)^k}{(1-x)(1-x^{2a})^k}$. Soit par exemple $k=2$, un calcul facile donne la relation:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)^2} = \sum E\left(\frac{n+2a-b}{2a}\right)\left[1 - 2E_1\left(\frac{n-b}{2a}\right)\right]x^n;$$

mais on peut suivre une autre voie, et en posant:

$$\frac{1}{(1+x)^k} = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n + \ldots$$

chercher la valeur de la somme: $A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu$. Il suffit pour cela d'avoir le coefficient de x^ν dans le développement de la fraction $\frac{1}{(1-x)(1+x)^k}$, et c'est ce que donne la décomposition en fractions simples, qui permet d'écrire:

$$\frac{2^k}{(1-x)(1+x)^k} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{(1+x)^k}.$$

La quantité cherchée s'offre ainsi sous la forme:

$$\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^\nu}{2^k}\left[1 + 2(\nu+1) + 2^2\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{1.2} + \ldots + 2^{k-1}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k-1)}{1.2\ldots(k-1)}\right];$$

le coefficient de x^n, dans le développement de $\frac{1}{(1-x)(1+x^a)^k}$ est donc obtenu explicitement au moyen de l'élément $\nu = E\left(\frac{n}{a}\right)$, tandis qu'en partant de la fonction $\frac{(1-x^a)^k}{(1-x)(1-x^{2a})^k}$, ce même coefficient s'exprimera d'une manière toute différente, au moyen de $E\left(\frac{n}{2a}\right)$ et $E\left(\frac{n}{2a}+\frac{1}{2}\right)$. Soit $k = 1$, pour considérer le cas le plus simple, nous aurons la relation:

$$E\left(\frac{n+2a}{2a}\right) - E\left(\frac{n+a}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{E\left(\frac{n}{a}\right)}\right]$$

ou plutôt:

$$E\left(\frac{n+a}{2a}\right) - E\left(\frac{n}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{E\left(\frac{n}{a}\right)}\right]$$

puis si l'on fait $\frac{n}{2a} = x$:

$$E\left(x+\frac{1}{2}\right) - E(x) = \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{E(2x)}\right]$$
$$= \sin^2\frac{\pi E(2x)}{2}$$

ce qui se vérifie immédiatement.

Je ne m'écarterai point de mon but en cherchant en ce moment à

approfondir les relations de cette nature, et je me bornerai à remarquer que de ces identités fort simples:

$$\frac{x^a}{(1-x)(1-x^a)} = \frac{x^a\left[1 + x^a + x^{2a} + \ldots + x^{(m-1)a}\right]}{(1-x)(1-x^{ma})},$$

$$\frac{x^a}{(1-x)(1-x^a)^2} = \frac{x^a\left[1 + x^a + x^{2a} + \ldots + x^{(m-1)a}\right]^2}{(1-x)(1-x^{ma})^2},$$

on conclut les propriétés suivantes de $E(x)$ et $E_2(x)$:

$$E(x) + E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \ldots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right) = E(mx).$$

$$E_2\left(x + \frac{1}{m}\right) + 2E_2\left(x + \frac{2}{m}\right) + \ldots + (m-1)E_2\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

$$+ E_2\left(x - \frac{1}{m}\right) + 2E_2\left(x - \frac{2}{m}\right) + \ldots + (m-1)E_2\left(x - \frac{m-1}{m}\right)$$

$$= E_2(mx) - mE_2(x).$$

VI.

J'appliquerai les résultats qui viennent d'être établis en premier lieu à la série d'Euler:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^a}{1-x^a} + \ldots = \sum \varphi(n)\, x^n$$

où $\varphi(n)$ désigne le nombre des diviseurs de n. La relation:

$$\frac{x^a}{(1-x)(1-x^a)} = \sum E\left(\frac{n}{a}\right) x^n$$

donne alors, comme on voit, la proposition arithmétique bien connue

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) = \sum E\left(\frac{n}{a}\right)$$

$$a = 1, 2, 3, \ldots$$

Et pareillement si l'on pose:

$$\frac{f(1)x}{1-x} + \frac{f(2)x^2}{1-x^2} + \dots + \frac{f(a)x^a}{1-x^a} + \dots = \sum F(n)x^n,$$

de sorte qu'on ait:

$$F(n) = f(1) + f(d) + f(d') + \dots$$

en désignant par d, d', etc. tous les diviseurs de n, nous obtenons:

$$F(1) + F(2) + \dots + F(n) = \sum E\left(\frac{n}{a}\right) f(a)$$
$$a = 1, 2, 3, \dots$$

Supposons en particulier que $f(n)$ soit un polynôme quelconque de degré k, qu'on pourra écrire ainsi:

$$f(n) = A + Bn + C\frac{n(n+1)}{1.2} + \dots + K\frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{1.2\dots k}.$$

Au moyen d'une transformation dont JACOBI a donné des exemples dans les formules du § 40 des *Fundamenta,* nous aurons:

$$\frac{f(1)x}{1-x} + \frac{f(2)x^2}{1-x^2} + \dots + \frac{f(a)x^a}{1-x^a} + \dots$$

$$= \sum \frac{Ax^a}{1-x^a} + \sum \frac{Bx^a}{(1-x^a)^2} + \dots + \sum \frac{Kx^a}{(1-x^a)^{k+1}}$$
$$a = 1, 2, 3, \dots$$

On en conclut l'égalité:

$$\sum E\left(\frac{n}{a}\right) f(a) = A\sum E\left(\frac{n}{a}\right) + B\sum E_2\left(\frac{n}{a}\right) + \dots + K\sum E_{k+1}\left(\frac{n}{a}\right),$$

et par conséquent celles-ci:

$$\sum E\left(\frac{n}{a}\right) a = \sum E_2\left(\frac{n}{a}\right),$$

$$\sum E\left(\frac{n}{a}\right)\frac{a(a+1)}{2} = \sum E_3\left(\frac{n}{a}\right),$$

. . . .

qui offrent autant de nouvelles propriétés de la fonction $E(x)$.

Remarquons encore au sujet de la série d'Euler qu'elle a été mise par Clausen sous la forme suivante:

$$x\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x^4\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + \ldots + x^{a^2}\left(\frac{1+x^a}{1-x^a}\right) + \ldots,$$

on a donc:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) = \sum \left[E\left(\frac{n+a-a^2}{a}\right) + E\left(\frac{n-a^2}{a}\right) \right],$$

et l'on voit que dans le second membre les valeurs de a ne doivent pas dépasser l'entier contenu dans $\sqrt{n}$, que je désignerai par ν, pour abréger. Remarquons maintenant qu'on peut écrire:

$$E\left(\frac{n+a-a^2}{a}\right) = E\left(\frac{n}{a}\right) + 1 - a$$

$$E\left(\frac{n-a^2}{a}\right) = E\left(\frac{n}{a}\right) - a$$

et que l'on a:

$$\sum_1^\nu (2a-1) = \nu^2,$$

nous en conclurons la formule:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) = 2\sum E\left(\frac{n}{a}\right) - \nu^2$$

$$a = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

dont j'ai donné ailleurs une démonstration arithmétique.[1]

Après la fonction $\varphi(n)$ se présentent celles que M. Kronecker a considérées dans son célèbre travail, sur le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant négatif (Journal de Borchardt, T. 57, p. 248), et qui se rapportent aux sommes des diviseurs des nombres. Elles sont désignées et définies comme il suit:

$X(n)$ somme de tous les diviseurs impairs de n,

$\Phi(n)$ somme de tous les diviseurs de n,

---

[1] *Sur quelques points dans la théorie des nombres:* Extrait d'une lettre à M. Lipschitz, Acta Mathematica, T. 2, p. 299.

$\Psi(n)$ excès de la somme des diviseurs de n supérieurs à $\sqrt{n}$, sur la somme des diviseurs moindres que $\sqrt{n}$,

$\Phi'(n)$ excès de la somme des diviseurs de n de la forme $8k \pm 1$, sur la somme des diviseurs de la forme $8k \pm 3$,

$\Psi'(n)$ excès de la somme des diviseurs $8k \pm 1$, supérieurs à $\sqrt{n}$, et des diviseurs $8k \pm 3$, moindres que $\sqrt{n}$, sur la somme des diviseurs $8k \pm 1$ moindres que $\sqrt{n}$, et des diviseurs $8k \pm 3$, plus grands que $\sqrt{n}$.

L'illustre géomètre donne ensuite les équations suivantes, où je suppose pour plus de clarté:

$$a = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

$$b = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$$

$$c = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

à savoir:

$$\sum [2 + (-1)^c] X(c) q^c = \sum \left[\frac{q^a}{(1 - q^a)^2} + \frac{q^b}{(1 + q^b)^2} \right]$$

$$\sum \Phi(c) q^c = \sum \frac{c q^c}{1 - q^c} - \sum \frac{q^c}{(1 - q^c)^2}$$

$$\sum \Psi(c) q^c = \sum \frac{q^{c^2 + c}}{(1 - q^c)^2}$$

$$\sum \Phi'(a) q^a = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(a^2 - 1)} \frac{a q^a}{1 - q^{2a}}$$

$$\sum \Psi'(a) q^a = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(a^2 + 7)} a \frac{q^{a^2}(1 + q^{2a}) - q^a}{1 - q^{2a}}.$$

Nous pouvons par conséquent exprimer au moyen de la fonction $E(x)$ les diverses sommes

$$X(1) + X(3) + X(5) + \ldots,$$

$$X(2) + X(4) + X(6) + \ldots \text{ et } \Phi(1) + \Phi(2) + \Phi(3) + \ldots, \text{ etc.}$$

Mais parmi les résultats qu'on trouve ainsi, les plus simples et les plus élégants ont été obtenus pour la première fois par M. Lipschitz, à qui j'en dois la communication. En désignant par A, B, C, des nombres

entiers de même nature que a, b, c, l'éminent géomètre a établi, par une méthode purement arithmétique, les formules suivantes:

$$X(1) + X(3) + \ldots + X(A) = \sum E_2\left(\frac{A+a}{2a}\right),$$

$$\Phi(1) + \Phi(2) + \ldots + \Phi(C) = \sum E_2\left(\frac{C}{c}\right),$$

$$\Psi(1) + \Psi(2) + \ldots + \Psi(C) = \sum E_2\left(\frac{C-c^2}{c}\right).$$

Et sans nul doute des procédés semblables donneraient aussi les relations d'une forme moins simple:

$$X(2) + X(4) + \ldots + X(B)$$
$$= \frac{1}{3}\sum\left[aE\left(\frac{B}{2a}\right) + bE_1\left(\frac{B}{2b}\right)\right],$$

$$\Phi'(1) + \Phi'(3) + \ldots + \Phi'(A)$$
$$= \sum(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)}aE\left(\frac{A+a}{2a}\right)$$

$$\Psi'(1) + \Psi'(3) + \ldots + \Psi'(A)$$
$$= \sum(-1)^{\frac{1}{8}(a^2+7)}a\left[E\left(\frac{A+2a-a^2}{2a}\right) + E\left(\frac{A-a^2}{2a}\right) - E\left(\frac{A+a}{2a}\right)\right].$$

La dernière peut encore s'écrire:

$$\Psi'(1) + \Psi'(3) + \ldots + \Psi'(A)$$
$$= \sum\left[(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)}aE\left(\frac{A+a}{2a}\right)\right] - \left[\sum(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)}a\right]$$
$$-2\sum\left[(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)}aE\left(\frac{A-a^2}{2a}\right)\right],$$

et l'on devra prendre les deux dernières sommes, en s'arrêtant à la valeur de a qui est donnée par le plus grand nombre impair contenu dans $\sqrt{A}$.

VII.

Une autre application, à laquelle je m'arrêterai un moment, concerne la fonction qui représente le nombre des solutions de l'équation $x^2 + y^2 = c$. En la désignant par $f(c)$, la théorie des fonctions elliptiques donne les relations:

$$\frac{2K}{\pi} = \sum_0 {}_c f(c) q^c = 1 + 4 \sum \frac{(-1)^{\frac{a-1}{2}} q^a}{1 - q^a},$$

$$\frac{2kK}{\pi} = \sum_0 {}_c f(8c + 2) q^{\frac{4c+1}{2}} = 4 \sum \frac{(-1)^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{q^a}}{1 - q^a},$$

dont la première nous conduit immédiatement au théorème d'Eisenstein:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(C) = 4 \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} E\left(\frac{C}{a}\right).$$

De la seconde nous tirons ensuite:

$$f(2) + f(10) + \ldots + f(8C + 2) = 4 \sum_0 {}_c (-1)^c E\left(\frac{2C - c}{2c + 1}\right);$$

mais ces formules ne sont pas les seules auxquelles mène la théorie des fonctions elliptiques. Jacobi a obtenu en effet, dans le dernier paragraphe des *Fundamenta*, ces développements d'une autre forme:

$$\frac{2k'K}{\pi} = 1 + 4 \sum_c \frac{(-1)^c q^{\frac{c^2+c}{2}}}{1 + q^c},$$

$$\frac{2kK}{\pi} = 4 \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{q^{a^2}} \frac{1 + q^{2a}}{1 - q^{2a}},$$

et le premier devient, si l'on change q en $-q$:

$$\frac{2K}{\pi} = 1 - 4 \sum_1 {}_c \frac{(-1)^c q^{2c^2-c}}{1 - q^{2c-1}} + 4 \sum_1 \frac{(-1)^c q^{2c^2+c}}{1 + q^{2c}}.$$

J'en ai déduit les formules suivantes, que je me borne à énoncer, me réservant d'y revenir dans une autre occasion.

1°. Soit: $n = E\left(\frac{\sqrt{8C+1}+1}{4}\right)$, et posons pour abréger:

$$S = E\left(\frac{C}{1}\right) - E\left(\frac{C}{3}\right) + \ldots - (-1)^n E\left(\frac{C}{2n-1}\right)$$

$$S_1 = E_1\left(\frac{C+1}{4}\right) + E_1\left(\frac{C+2}{8}\right) + \ldots + E_1\left(\frac{C+n}{4n}\right);$$

on aura:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(C) = 4\left[S + S_1 - n\sin^2\frac{n\pi}{2}\right].$$

2°. Soit ensuite: $n = E\left(\frac{\sqrt{4C+1}+1}{2}\right)$, nous obtenons:

$$f(2) + f(10) + \ldots + f(8C+2)$$

$$= 8\left[E\left(\frac{C}{1}\right) - E\left(\frac{C-1\cdot 2}{3}\right) + E\left(\frac{C-2\cdot 3}{5}\right) - \ldots - (-1)^n E\left(\frac{C-n^2+n}{2n-1}\right)\right] + 4\sin^2\frac{n\pi}{2}.$$

Enfin on trouve dans le second volume des oeuvres de Gauss (*De nexu inter multitudinem classium*, etc., p. 279), la formule:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(C) = 4\sum E(\sqrt{C-c^2})$$
$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ E(\sqrt{n}),$$

qui est d'une nature toute différente. La remarque suivante que j'emploierai tout-à-l'heure pour un autre objet, en donne une démonstration facile.

Soit: $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^4 + \ldots + A_n x^{n^2} + \ldots$, le coefficient d'un terme quelconque du développement de la fonction: $\frac{f(x)}{1-x}$, se tire de l'égalité:

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum A_\mu x^{\mu^2+\lambda}$$
$$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$
$$\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

en posant la condition:

$$\mu^2 + \lambda = n.$$

Nous avons ainsi les valeurs $\mu = 0, 1, 2, \ldots, E(\sqrt{n})$, et en faisant pour abréger l'écriture, $\nu = E(\sqrt{n})$, il est clair qu'on obtient:

$$\frac{f(x)}{1-x} = \Sigma[A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu]x^n.$$

On aurait d'une manière plus générale, si l'on désigne par c un entier quelconque, et qu'on fasse alors $\nu = E\left(\sqrt{\frac{n}{c}}\right)$:

$$\frac{f(x^c)}{1-x} = \Sigma[A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu]x^n.$$

Soit encore:

$$f(x) = A_1\sqrt[4]{x} + A_2\sqrt[4]{x^9} + \ldots + A_n\sqrt[4]{x^{(2n-1)^2}} + \ldots$$

nous trouverons semblablement:

$$\frac{f(x)}{1-x} = \Sigma[A_1 + A_2 + \ldots + A_\nu]x^{n+\frac{1}{4}}$$

en prenant dans ce cas: $\nu = E\left(\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right)$.

En particulier on remarquera les relations suivantes:

$$\frac{x + x^4 + x^9 + \ldots}{1-x} = \sum_1^\infty E(\sqrt{n})x^n,$$

$$\frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \ldots}{1-x} = \sum_0^\infty E\left(\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right)x^{n+\frac{1}{4}},$$

puis, comme on le verra aisément, en désignant par k un entier quelconque:

$$\frac{(x + x^4 + x^9 + \ldots)x^k}{1-x} = \Sigma E(\sqrt{n-k})x^n$$

$$n = k+1, \quad k+2, \quad k+3, \ldots$$

$$\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \ldots)x^k}{1-x} = \sum E\left(\frac{\sqrt{4n+1-4k}+1}{2}\right)x^{n+\frac{1}{4}}$$

$$n = k, \quad k+1, \quad k+2, \ldots.$$

De ces formules résultent les suivantes.

Soit:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_k x^k + \ldots$$

nous aurons:

$$\frac{(x + x^4 + x^9 + \ldots) F(x)}{1 - x} = \sum A_k E(\sqrt{n - k})\, x^n,$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1,$$

et semblablement:

$$\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \ldots) F(x)}{1 - x} = \sum A_k E\left(\frac{\sqrt{4n + 1 - 4k} + 1}{2}\right) x^{n + \frac{1}{4}},$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Supposons dans la première de ces deux relations:

$$F(x) = x + x^4 + x^9 + \ldots$$

elle donne immédiatement l'égalité:

$$\frac{(x + x^4 + x^9 + \ldots)^2}{1 - x} = \sum E(\sqrt{n - c^2})\, x^n,$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$c = 1,\ 2,\ \ldots,\ E(\sqrt{n}).$$

On en conclut le développement de la quantité: $\frac{(1 + 2x + 2x^4 + \ldots)^2}{1 - x}$ sous la forme suivante:

$$\sum [1 + 4E(\sqrt{n - c^2})]\, x^n,$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ E(\sqrt{n}).$$

et par suite le théorème de Gauss:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(c) = 4 \sum E(\sqrt{c - c'^2}).$$

Prenons de même, dans la seconde formule;

$$F(x) = \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \dots}{\sqrt[4]{c}},$$

nous trouverons la relation:

$$\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \dots)^2}{1 - x} = \sum E\left(\frac{\sqrt{4n + 2 - (2c - 1)^2} + 1}{2}\right) x^{n+\frac{1}{2}},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$c = 1, 2, \dots, E\left(\frac{\sqrt{4n + 2} + 1}{2}\right).$$

Le résultat suivant qui s'en tire:

$$f(2) + f(10) + \dots + f(8C + 2) = 4 \sum E\left(\frac{\sqrt{4n + 2 - a^2} + 1}{2}\right),$$

où la somme doit s'étendre dans le second membre aux valeurs $a = 1, 3, 5, \dots$ en s'arrêtant à la racine du plus grand carré impair contenu dans $4n + 2$, a été donné par Liouville, dans une courte note qui porte pour titre: *Égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique* $E(x)$ (Journal de mathématiques, 2me Série, T. V, 1860).

VIII.

J'arrive maintenant au point que j'avais principalement en vue, en déduisant des beaux théorèmes de M. Kronecker, démontrés au commencement de ces recherches, les expressions des trois sommes:

$$A = F(2) + F(6) + \dots + F(4n + 2),$$

$$B = F(1) + F(5) + \dots + F(4n + 1),$$

$$C = F(3) + F(11) + \dots + F(8n + 3).$$

Voici, parmi plusieurs autres, deux formes sous lesquelles on peut les obtenir.

Considérons d'abord le premier théorème:

$$\vartheta_2^2 \vartheta_3 = 4 \sum_0 F(4n + 2) q^{n + \frac{1}{2}};$$

je remarque, pour former le quotient $\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3}{1-q}$, que l'on a:

$$\vartheta_2^2 = \sum_0 f(8c+2)q^{2c+\frac{1}{2}},$$
$$\vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + \dots.$$

Nous avons ainsi une première partie, dont le développement suivant les puissances de q est donné immédiatement par la formule:

$$\frac{\vartheta_2^2}{1-q} = \sum f(8c+2)q^{n+\frac{1}{2}}.$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$
$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

En appliquant ensuite l'égalité obtenue dans le paragraphe précédent:

$$\frac{(x + x^4 + x^9 + \dots)F(x)}{1-x} = \sum A_k E(\sqrt{n-k})x^n,$$

on trouve:

$$\frac{(q + q^4 + q^9 + \dots)\vartheta_2^2}{1-q} = \sum f(8c+2)E(\sqrt{n-2c})q^{n+\frac{1}{2}},$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$
$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ E\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

La somme cherchée A, étant le coefficient de $q^{n+\frac{1}{2}}$, dans le développement que nous venons de former de $\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3}{1-q}$, nous sommes amenés à la formule:

$$4A = \sum f(8c+2) + 2\sum f(8c+2)E(\sqrt{n-2c}),$$

où il faut prendre dans le premier terme: $c = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n$, et dans le second, $c = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

D'une manière toute semblable, nous parvenons aux développements qui suivent:

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3^2}{1-q} = 2\sum f(c)\,E\left(\frac{\sqrt{4n+1-4c}+1}{2}\right)q^{n+\frac{1}{4}},$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$\frac{\vartheta_3^3}{1-q} = 2\sum f(8c+2)\,E\left(\frac{\sqrt{4n+1-8c}+1}{2}\right)q^{n+\frac{3}{4}},$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Cela étant, le coefficient de $q^{n+\frac{1}{4}}$ dans le premier, et le coefficient de $q^{2n+\frac{3}{4}}$ dans le second, donnent les expressions des sommes B et C; on trouve ainsi:

$$2B = \sum f(c)\,E\left(\frac{\sqrt{4n+1-4c}+1}{2}\right),$$

$$4C = \sum f(8c+2)\,E\left(\frac{\sqrt{8n+1-8c}+1}{2}\right)$$

en prenant $c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Nous obtiendrons les mêmes quantités sous une autre forme, dans laquelle figure uniquement la fonction $E(x)$, au moyen de la série de Jacobi dont nous avons déjà parlé:

$$\vartheta_2^2 = 4\sqrt{q}\,\frac{1+q^2}{1-q^2} - 4\sqrt{q^9}\,\frac{1+q^6}{1-q^6} + 4\sqrt{q^{25}}\,\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}} - \ldots$$

et de celle qu'on en tire en changeant q en $\sqrt{q}$:

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2\sqrt[4]{q}\,\frac{1+q}{1-q} - 4\sqrt[4]{q^9}\,\frac{1+q^3}{1-q^3} + 4\sqrt[4]{q^{25}}\,\frac{1+q^5}{1-q^5} - \ldots$$

Multiplions à cet effet, membre à membre, les deux égalités:

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}\sqrt[4]{q^{a^2}}\frac{1+q^a}{1-q^a},$$

$$\vartheta_2 = 2\sum\sqrt[4]{q^{a'^2}},$$

il vient ainsi:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3 = 4\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}\sqrt[4]{q^{a^2+a'^2}}\frac{1+q^a}{1-q^a},$$

$$a = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

$$a' = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

et en remarquant que $\frac{a^2-1}{4}$ et $\frac{a'^2-1}{4}$ sont des entiers:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3 = 4q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}q^{\frac{a^2+a'^2-2}{4}}\frac{1+q^a}{1-q^a}.$$

Nous avons donc:

$$\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3}{1-q} = 4q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}q^{\frac{a^2+a'^2-2}{4}}\frac{1+q^a}{(1-q)(1-q^a)},$$

de sorte que les formules de développement précédemment employées nous donnent:

$$\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3}{1-q} = 4q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left[E\left(\frac{4n+2+4a-a^2-a'^2}{4a}\right)+E\left(\frac{4n+2-a^2-a'^2}{4a}\right)\right]q^n.$$

Or le coefficient de q^n, se réduit à l'expression plus simple:

$$1+2E\left(\frac{4n+2-a^2-a'^2}{4a}\right),$$

et comme le premier des deux signes E, se rapporte à tous les systèmes de valeurs des nombres impairs et positifs, a et a', qui satisfont à la condition:

$$\frac{4n+2+4a-a^2-a'^2}{4a} \geqq 1,$$

c'est à dire:

$$4n + 2 - a^2 - a'^2 \geqq 0,$$

on voit qu'en posant sous cette condition:

$$S = \Sigma (-1)^{\frac{a-1}{2}}$$

puis semblablement:

$$S_1 = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} E\left(\frac{4n + 2 - a^2 - a'^2}{4a}\right),$$

on obtient la quantité cherchée, sous cette nouvelle forme:

$$A = S + 2S_1.$$

En second lieu, multiplions par

$$\vartheta_3 = \Sigma q^{c^2}$$

en supposant:

$$c = 0, \pm 1, \pm 2, \text{ etc.},$$

la même égalité:

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2 \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} \sqrt[4]{q^{a^2}} \frac{1 + q^a}{1 - q^a}.$$

On trouvera de cette manière:

$$\vartheta_2\vartheta_3^2 = 2q^{\frac{1}{4}} \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} q^{\frac{a^2+4c^2-1}{4}} \frac{1 + q^a}{1 - q^a},$$

et si l'on désigne par b le nombre pair $2c$, nous aurons

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3^2}{1-q} = 2q^{\frac{1}{4}} \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} q^{\frac{a^2+b^2-1}{4}} \frac{1 + q^a}{(1-q)(1-q^a)}$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left[E\left(\frac{4n + 1 + 4a - a^2 - b^2}{4a}\right) + E\left(\frac{4n + 1 - a^2 - b^2}{4a}\right)\right] q^n.$$

Posons donc la condition:

$$4n + 1 - a^2 - b^2 \geqq 0.$$

en supposant que a soit impair et positif, b ayant des valeurs paires positives, nulles ou négatives, et soit alors:

$$S = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}$$

$$S_1 = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} E\left(\frac{4n + 1 - a^2 - b^2}{4a}\right),$$

la quantité B, sera exprimée par la formule:

$$2B = S + 2S_1.$$

En dernier lieu nous trouverons par des considérations toutes semblables:

$$C = S + 2S_1$$

en posant:

$$S = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}$$

$$S_1 = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} E\left(\frac{8n + 3 - 2a^2 - a'^2}{8a}\right),$$

les deux sommes se rapportant à tous les systèmes de nombres impairs et positifs a et a', satisfaisant à la condition:

$$8n + 3 - 2a^2 - a'^2 \geqq 0.$$

Je ferai une application de la première des formules obtenues, qui servira en même temps de vérification, en supposant $n = 6$. On trouve alors que la condition posée, à savoir:

$$26 - a^2 - a'^2 > 0$$

est remplie pour les valeurs:

$$\begin{array}{ll} a = 1, & a' = 1,\ 3,\ 5, \\ a = 3, & a' = 1,\ 3 \\ a = 5, & a' = 1. \end{array}$$

Le nombre a, étant trois fois égal à un, deux fois égal à 3 et une fois égal à 5, nous avons:

$$S = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} = 2.$$

On obtient ensuite:

$$S_1 = E\left(\frac{24}{4}\right) + E\left(\frac{16}{4}\right) - E\left(\frac{14}{12}\right) = 9.$$

La somme A des nombres de classes des déterminants: $D = -2, -6, -10, -14, -18, -22, -26$, est donc égale à 20; c'est en effet ce que donne la table suivante des réduites:

$$\begin{aligned} D &= -\ 2, && (1,\ 0,\ 2) \\ &= -\ 6, && (1,\ 0,\ 6)(2,\ 0,\ 3) \\ &= -10, && (1,\ 0,\ 10)(2,\ 0,\ 5) \\ &= -14, && (1,\ 0,\ 14)(2,\ 0,\ 7)(3,\ \pm 1,\ 5) \\ &= -18, && (1,\ 0,\ 18)(3,\ 0,\ 6)(2,\ 0,\ 9) \\ &= -22, && (1,\ 0,\ 2)(2,\ 0,\ 11) \\ &= -26, && (1,\ 0,\ 26)(2,\ 0,\ 13)(3,\ \pm 1,\ 9)(5,\ \pm 2,\ 6). \end{aligned}$$

J'indiquerai encore en terminant la formule:

$$F(3) + F(7) + \ldots + F(4n+3) = 2\sum E\left(\frac{n + 1 - c^2 - 2cc'}{2c + 2c' + 1}\right);$$

la somme du second membre s'étend à tous les entiers positifs, c et c' satisfaisant à la condition:

$$(c+1)(2c + 2c' + 1) \overline{\overline{<}}\, n + 1,$$

en convenant de réduire à moitié les termes qui sont donnés quand on suppose $c' = 0$. La démonstration de ce résultat sera l'objet d'un travail qui paraîtra prochainement.

ÜBER DIE
DURCHDRINGUNG GLEICHSEITIGER ROTATIONSHYPERBOLOIDE
VON PARALLELEN AXEN

VON

WILH. FIEDLER
in ZÜRICH.

Einleitung.

1. Das Anschauungsgebiet, in welchem sich die nachfolgenden Entwickelungen bewegen, ist durch folgende Betrachtungen einfach zu umschreiben.

Wenn zwischen den Radien R und r von zwei Kreisen in derselben Ebene, von denen der erste als fest gedacht wird, und ihrer Centraldistanz $2c$ eine der Relationen

$$(2c)^2 = R^2 + r^2, \qquad (2c)^2 + R^2 = r^2, \qquad (2c)^2 + r^2 = R^2$$

des Pythagoräischen Satzes besteht, so wird dadurch der Reihe nach ausgesagt, dass die Kreise R und r sich orthogonal durchschneiden, dass der Kreis R von r oder endlich der Kreis r von R diametral d. h. in den Endpunkten eines seiner Durchmesser geschnitten wird. Und weil die beiden letzten Relationen durch Zeichenwechsel von R^2 resp. r^2 aus der ersten hervorgehen, so sagen wir, dass der *Orthogonalschnitt* eines rein imaginären Kreises durch den *Diametralschnitt* seines reellen Stellvertreters oder Symmetriekreises ersetzt wird.

Betrachtet man die Centraldistanz $2c$ als unabhängige Veränderliche und den Radius r als Function derselben, so erhält man im ersten Falle für $2c > R$, im dritten Falle für $2c < R$ und im zweiten immer zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe von r: insbesondere den Werth Null für $(2c)^2 = R^2$ im ersten und dritten Falle, aber nur für

$$(2c)^2 + R^2 = 0$$

also bei reellem Radius für keinen reellen Werth der Centraldistanz im zweiten Falle; $2c = 0$ giebt im ersten Falle den rein imaginären Functionswerth $r^2 = -R^2$, im zweiten und dritten $r^2 = R^2$, zugleich den kleinsten und resp. grössten reellen Werth der Function. Trägt man von den Punkten der durch den Werth von $2c$ gegebenen zu R concentrischen Kreise der Ebene oder Tafel auf ihre zugehörigen Normalen die Werthe r ab, die ihnen entsprechen, so erfüllen die Endpunkte in jedem Falle eine zur Tafel orthogonal-symmetrische Fläche; eine *Rotationsfläche zweiten Grades*, weil für die Normale im Mittelpunkt von R als Axe der z und zwei zu einander rechtwinklige Durchmesser desselben Kreises als Axen der x und y wegen $(2c)^2 = x^2 + y^2$ und $r^2 = z^2$ die obigen Relationen übergehen in

$$x^2 + y^2 = R^2 + z^2, \qquad x^2 + y^2 + R^2 = z^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Von diesen Flächen ist die dritte die *Kugel* über dem Hauptkreise R, die erste und zweite haben den gleichseitigen Rotationskegel $x^2 + y^2 = z^2$ zum gemeinsamen Asymptotenkegel und werden als *einfaches* und *zweifaches gleichseitiges Rotationshyperboloid* unterschieden. Die erste und dritte Fläche berühren einander mit zur Tafel normalen Tangentialebenen in allen Punkten des Kreises R, die zweite und dritte mit zur Tafel parallelen Tangentialebenen in den Punkten $x = 0$, $y = 0$, $z^2 = R^2$. Wir sagen, dass die Kreise in der Tafel, welche einen festen Kreis R derselben orthogonal resp. diametral schneiden, die *Bildkreise* der Punkte eines einfachen resp. zweifachen gleichseitigen Rotationshyperboloides sind, für welches R der Hauptkreis ist, und nennen diese Gesammtheit das *Netz* von Kreisen mit reellem und resp. imaginärem Orthogonalkreis; während die Kreise der Tafel, die von R diametral geschnitten werden, die Bildkreise für die Punkte der Kugel sind, die jenen zum Hauptkreis hat.

Die Querschnitte der drei Flächen mit der Ebene $y=0$, also die Hyperbeln mit der Centrale der Kreise oder der Axe x als Hauptaxe resp. Nebenaxe und der Kreis

$$x^2 - z^2 = R^2, \qquad z^2 - x^2 = R^2, \qquad x^2 + z^2 = R^2,$$

sind die Repräsentanten der *Büschel* von Kreisen mit *Grenz*punkten resp. mit *Grund*punkten, die aus Punkten von x einen gegebenen Kreis $x^2 + y^2 = R^2$ orthogonal resp. diametral schneiden oder endlich, die diametral von ihm geschnitten werden.

Endlich sehen wir, dass der Schnitt des einfachen Hyperboloides $x^2 + y^2 = R^2 + z^2$ mit jeder der Ebenen $y = \pm R$ durch $x^2 - z^2 = 0$ oder $(x+z)(x-z) = 0$ ausgedrückt wird oder aus zwei in der Kehlkreistangente $y = \pm R$ projicierten durch $x=0$, $z=0$ gehenden unter 45° zur Tafel geneigten Geraden besteht, und aus der Rotationssymmetrie der Fläche folgt dass dies für jede der den Kehlkreis berührenden Normalebenen zur Tafel stattfindet, oder dass die Fläche zwei Systeme reeller gerader Linien enthält, repräsentiert durch die Büschel sich berührender Kreise, die zu dem Kehlkreis in demselben Punkte orthogonal sind; sie sollen ihre *Mantellinien* genannt werden.

2. Wenn die reellen Kreise R und r in der Tafel sich unter dem Winkel σ reell schneiden, so hat man für das Quadrat ihrer Centraldistanz

$$(2c)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\sigma;$$

wir setzen auf Grund des vorigen fest, dass der Schnitt des rein imaginären Kreises vom Radius iR resp. ir mit dem Kreise r oder R unter dem Winkel vom Cosinuswerth $i\cos\sigma$, endlich der Schnitt der rein imaginären Kreise iR und ir unter dem Winkel σ ausgedrückt werde durch

$$(2c)^2 = -R^2 + r^2 + 2Rr\cos\sigma, \qquad (2c)^2 = R^2 - r^2 + 2Rr\cos\sigma,$$
$$(2c)^2 = -R^2 - r^2 + 2Rr\cos\sigma$$

resp. Man hat damit für die durch solche Kreissysteme cyklographisch abgebildeten Flächen der Reihe nach

$$x^2 + y^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\sigma, \qquad x^2 + y^2 = -R^2 + z^2 + 2Rz\cos\sigma,$$
$$x^2 + y^2 = R^2 - z^2 + 2Rz\cos\sigma, \qquad x^2 + y^2 = -R^2 - z^2 + 2Rz\cos\sigma.$$

Setzt man $(z - z_0)$ für z und bestimmt z_0 jeweilen so, dass die erste Potenz von z den Coefficienten Null erhält, was für die zweite $z_0 = - R\cos\sigma$ und für die drei andern $z_0 = R\cos\sigma$ liefert, so gehen die Gleichungen über in

$$x^2 + y^2 = R^2(1 - \cos^2\sigma) + z^2, \qquad x^2 + y^2 = - R^2(1 + \cos^2\sigma) + z^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(1 + \cos^2\sigma), \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2(\cos^2\sigma - 1)$$

und zeigen damit die Flächen als *einfache* und *zweifache gleichseitige Rotationshyperboloide* und als *Kugeln* von einfach bestimmten zur Tafel parallelen Hauptebenen und Radien. Insbesondere ist die erste für alle reellen σ ein einfaches und für die nicht reellen mit reellen Cosinuswerthen ein zweifaches Hyperboloid, die letzte nur für $\cos^2\sigma > 1$ eine reelle Kugel. Damit ist der Schnitt von Kreisen in einer Ebene unter Winkeln von vorgeschriebenem Cosinuswerth oder der *Winkelschnitt* für reelle und für rein imaginäre Kreise durch einfache Constructionen bestimmt. Unter den speciellen Fällen führt $\cos\sigma = 0$ auf die Grundgleichungen in § 1 zurück; $\cos\sigma = \pm 1$ macht aus der ersten und der letzten Gleichung respective

$$x^2 + y^2 = (R \mp z)^2 \text{ oder } x^2 + y^2 = z^2 \text{ für } z_0 = \mp R, \quad 2c = R \mp r$$

und

$$x^2 + y^2 = - (R \mp z)^2 \text{ oder } x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad 2c = i(R \mp r),$$

die Asymptotenkegel der Hyperboloide und der Kugel. Die Specialisierung für den Schnitt mit der Ebene $y = 0$ etc. wiederholen wir nicht; bemerken aber dass für den in eine Gerade übergegangenen festen Kreis oder R und c als unendlich gross für e als den Abstand der Geraden vom Mittelpunkt des Kreises r wegen $R - 2c = e$ und $R + 2c = 2R$ aus der Definitionsgleichung des Schnittwinkels durch Einsetzen und nach dem Verschwinden von r^2 gegen die unendlich grossen Glieder folgt

$$r\cos\sigma = e \text{ oder } \cos\sigma = \frac{e}{r} = \frac{x}{z} = \operatorname{cotg}\alpha$$

für die Wahl der Axe x als normal zur Geraden R in der Tafel und für α als den Neigungswinkel der durch sie und die Punkte (x, z) oder die von den Bildkreisen (e, r) dargestellten Punkte bestimmten *Ebene* gegen die Tafel.

Die Grenzwerthe von $\cos\sigma$ liefern die zur Tafel normale Ebene als *Grenzform* des einfachen Hyperboloides mit der Tafel als Hauptebene und die 45° Ebene als Grenzform des gleichseitigen Rotationskegels mit zur Tafel normaler Axe; mit $\cos\sigma \lesseqgtr 1$ wird die unter mehr oder weniger als 45° zur Tafel geneigte Ebene als Grenzform des einfachen resp. zweifachen Hyperboloides für unendlich wachsenden Spurkreis in der Tafel bezeichnet. Die Tangentialebene im Punkte $x = R$, $y = 0$, $z = 0$ von

$$x^2 + y^2 = \pm R^2 + z^2 \mp 2Rz\cos\sigma$$

ist $x \pm z\cos\sigma = \pm R$ oder für ihren Neigungswinkel zur Ebene xy ist $\operatorname{cotg}\alpha = \cos\sigma$; d. h. *der Schnittwinkel der Bildkreise der Hyperboloidpunkte mit dem Spurkreis desselben hat zu seinem Cosinus die Cotangente der Tafelneigung des Hyperboloides im Spurkreis.* Für das einfache Hyperboloid ist der Schnitt der vorgenannten Ebene aus $z\cos\sigma = R - x$ also $(R - x)^2 \operatorname{tg}^2\sigma = y^2$ aus zwei reellen Geraden zusammengesetzt (§ 1).

3. Irgend zwei der betrachteten Flächen für reelle r durchdringen sich stets in einem *Kegelschnitt* im Endlichen, die Kegel und Hyperboloide in Folge ihrer besonderen Art und Lage, nach welcher sie den unendlich fernen Querschnitt mit einander gemein haben. Dasselbe gilt auch im Bereich der *rein imaginären* r für die Durchdringung von zwei Kugeln aus demselben Grunde. Die Flächen aus reellen r durchdringen sich dagegen mit denen aus rein imaginären r, weil sich kein fester Theil absondert, in *doppelt gekrümmten Curven*, selbstverständlich den Fall von Ebene und Kugel ausgenommen, der stets einen Kreis liefert. Wir haben es im Folgenden nicht eigentlich mit diesen Durchdringungen von Kugeln und gleichseitigen Rotationshyperboloiden zu thun, weil sie eine zweifache Interpretation derselben Grössen z einschliessen; aber es ist Grund, sie nicht ganz zu übergehen und sie mögen am besten hier als Beispiel erörtert werden. Die Orthogonalprojection solcher Querschnitte resp. Durchdringungen nach der Richtung der Axen liefert die *Theorie der Kegelschnitte* und *gewisser Curven vierter Ordnung aus Kreissystemen*, die ebenen Querschnitte der Kugel und die Durchdringungen von Kugeln mit einander führen insbesondere auf cyklographische Eigenschaften der Ellipse. Man bildet die Gleichungen dieser Orthogonalprojectionen in allen Fällen durch Elimination der z zwischen den Gleichungen der sich Durchdrin-

genden Flächen, wie es hier für *Kugel* und *Hyperboloid* geschehen soll. Wir denken die Axe der z in der Mitte zwischen den Axen der Flächen und die der x als Verbindungslinie ihrer Fusspunkte in der Tafel, dann den Mittelpunkt der Kugel in der Tafel, so dass mit $2c$ als dem Abstand der Axen und der Hauptkreisprojectionen der Flächen

$$(x + c)^2 + y^2 + z^2 = r_1^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 = r_2^2 + z^2 - 2r_2 z \cos\sigma$$

ihre Gleichungen sind; die Elimination der z aus denselben giebt allgemein für die Projection der Durchdringung

$$\{2(x^2 + y^2 + c^2) - (r_1^2 + r_2^2)\}^2 = 4r_2^2 \cos^2\sigma \{r_1^2 - (x + c)^2 - y^2\}.$$

Mit $\cos\sigma = 0$ oder dem Kugelmittelpunkt in der Hauptebene des Hyperboloids und mit $c = 0$ oder für zusammenfallende Axen der Flächen reduciert sich dies auf

$$\left\{x^2 + y^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2c^2}{2}\right\}^2 = 0,$$

resp.

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)\{r_1^2 + r_2^2(1 - \cos^2\sigma)\} + \frac{1}{4}\{(r_1^2 + r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \cos^2\sigma\} = 0;$$

den doppelt zählenden Kreis aus der Mitte der Centrale durch die Schnittpunkte der Hauptkreise, und resp. ein Paar von concentrischen Kreisen, die Projectionen der beiden Flächen gemeinsamen Parallelkreise, für welche der Factor von $-(x^2 + y^2)$ die Summe der Radienquadrate und das absolute Glied das Product derselben ist; im letzten Falle bemerkt man, dass jene Summe mit der Summe der Radienquadrate der Hauptkreise übereinstimmt und insbesondere, dass für $\cos\sigma = 0$ beide Kreise der Projection in einen einzigen zusammenfallen, dessen Radiusquadrat das arithmetische Mittel von denen der gegebenen Kreise ist; J. Steiner hat in § 7 seiner Abhandlung *Über einige neue Bestimmungsarten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven* vom März 1852 (Werke II, S. 462) diese Ergebnisse, zum Theil ohne nähere Bestimmung und durchweg ohne Beweis, mitgetheilt. Ich werde diese Abhandlung weiterhin abkürzend durch St. 1852 unter Angabe der p. von Werke II citieren, denn es wird sich zeigen, dass meine An-

schauung ihren ganzen Inhalt auf das Einfachste liefert und noch vieles hinzu zu fügen gestattet. Jene Curve vierter Ordnung ist nach ihrer Entstehung der Ort vom Centrum eines Kreises, welcher von einem festen Kreise diametral und von einem andern unter Winkeln von vorgeschriebenem Cosinuswerth geschnitten wird: der doppelt zählende Kreis aus der Mitte der Centrale entspricht der Orthogonalität der letzteren Schnitte; etc.

Sind beide Flächen *Kugeln*

$$(x + c)^2 + y^2 + z^2 = r_1^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2 + 2r_2 z \cos\sigma,$$

so ist die Projection der Durchdringung, die Ellipse

$$(r_1^2 - r_2^2 - 4cx)^2 = 4r_2^2 \cos^2\sigma\{r_1^2 - (x + c)^2 - y^2\},$$

der Ort vom Centrum eines rein imaginären Kreises, der vom Hauptkreis der ersten Kugel orthogonal und vom Spurkreis der zweiten unter einem Winkel von vorgeschriebenem Cosinuswerth geschnitten wird; etc. In allen Fällen einer ebenen Durchdringung von zwei Flächen mit derselben Hauptebene, also für zwei Kugeln und für die Combinationen von zwei Hyperboloiden mit in der Tafel liegenden Mittelpunkten, entsteht als ihre Projection die *Potenzlinie* der Hauptkreise mit den Gleichungen resp.

$$4cx = r_1^2 - r_2^2, \qquad 4cx = r_2^2 - r_1^2, \qquad 4cx = r_1^2 + r_2^2$$

für zwei Kugeln wie für zwei einfache Hyperboloide mit denselben Hauptkreisen, für zwei zweifache Hyperboloide und für ein einfaches und ein zweifaches Hyperboloid; sie ist desshalb für zwei reelle Kreise *innerhalb* derselben der Ort der Centra der Kreise, die von ihnen diametral und *ausserhalb* der Ort der Centra der Kreise, die von ihnen orthogonal geschnitten werden; für zwei rein imaginäre Kreise der Ort der Centra von Kreisen, welche sie diametral schneiden, etc. Die Formeln enthalten die Regeln ihrer Construction.

4. Da die Projectionen der Durchdringungen von *Hyperboloiden* im Allgemeinen *Kegelschnitte* sind, so erhalten wir für diese eine Reihe von Beziehungen zu Kreissystemen, welche den verschiedenen Erzeugungen als Durchdringung entsprechend und von dem allgemeinen Fall zu den speciellen Fällen übergehend sich wie folgt aussprechen lassen. Ein Kegelschnitt ist der Ort der Mittelpunkte von reellen Kreisen in der Tafel,

welche zwei gegebene feste einzeln oder zusammen reelle oder rein imaginäre Kreise unter Winkeln von resp. vorgeschriebenen Cosinuswerthen schneiden; von reellen Kreisen, die von zwei festen Kreisen den einen orthogonal resp. diametral und den andern unter Winkeln von gegebenem Cosinuswerth schneiden. Er ist ferner, der Beiziehung der Specialformen Kegel und Ebene entsprechend, der Ort der Mittelpunkte von reellen Kreisen, die einen festen Kreis berühren resp. durch einen festen Punkt gehen und einen zweiten festen Kreis orthogonal, diametral oder unter Winkeln von vorgeschriebenem Cosinus schneiden; von Kreisen, welche zwei feste Kreise gleichartig resp. ungleichartig berühren; von Kreisen, die einen festen Kreis und eine feste Gerade der Tafel unter gegebenen Winkeln schneiden; oder die durch einen festen Punkt gehen resp. einen festen Kreis berühren und eine Gerade unter gegebenem Winkel schneiden; oder die durch einen festen Punkt gehen resp. einen festen Kreis berühren, einen festen Kreis orthogonal oder diametral durchschneiden und zugleich eine feste Gerade der Tafel unter vorgeschriebenem Winkel treffen. Dem Falle von zwei Ebenen entspricht endlich als Grenzform der Kegelschnittprojection die *gerade Linie*, der Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche zwei feste Gerade, die Spuren jener Ebenen, unter Winkeln von gegebenem Cosinuswerth schneiden; und es ist offenbar, dass diese *Kreise* eine *lineare Reihe* mit dem Schnittpunkt jener Geraden als Durchstosspunkt in der Tafel und als gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt der Kreise bilden.

Sowie nun in diesem besonderen Falle durch die Schnittlinie der betrachteten Ebenen unendlich viele andere Ebenen gehen, deren Spuren in der Tafel, die Ähnlichkeitsstrahlen der Reihe von Kreisen, sämtlich gleichwinklig schneidende jener Kreise für andere Cosinuswerthe sind, so gehen auch durch die allgemeine Durchdringung von zwei parallelaxigen gleichseitigen Rotationshyperboloiden unendlich viele solche Flächen, eine durch jeden Punkt wie dort; alle diese Flächen bilden das *Büschel der gleichseitigen parallelaxigen Rotationshyperboloide*, und sein Querschnitt mit irgend einer Ebene ist ein Büschel von Kegelschnitten mit zwei im Unendlichen und zwei im Endlichen gelegenen Grundpunkten, für Ebenen normal zur Richtung seiner Axen insbesondere ein Büschel von Kreisen. Wir haben eine allgemeine Eigenschaft und einen unterscheidenden Character solcher Büschel hervorzuheben, die Existenz einer geraden Linie als

Ort ihrer Mittelpunkte und die eigentlichen Kegel unter ihren Flächen. Was die erste betrifft, so ist bekanntlich der Ort der Mittelpunkte der Flächen eines Büschels von Flächen zweiten Grades eine doppelt gekrümmte Curve dritter Ordnung, welche durch die Ecken seines gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole und Polarebenen hindurchgeht und daher durch die Mittelpunkte der zwei nothwendig gegebenen Flächen des Büschels bestimmt ist. Aber in unserem Falle zerfällt die Durchdringung in den unendlich fernen gemeinsamen Parallelkreis der Hyperboloide und einen Kegelschnitt im endlichen Raum; in den unendlich fernen Punkten, welche beiden gemein sind, haben alle Flächen des Büschels dieselben Tangentialebenen, jene sind Ecken des Quadrupels, diese die zugehörigen Polarebenen, und ihre Schnittlinie ist der *eigentliche Mittelpunktsort der Flächen des Büschels;* diese *Mittelpunktsgerade* geht somit durch den Pol der unendlich fernen Geraden der Ebene des Durchdringungskegelschnittes in Bezug auf den unendlich fernen Parallelkreis der Flächen nach dem Mittelpunkte jenes Kegelschnittes und liegt daher in der Axenebene der gegebenen Flächen. Aus dieser Vertheilung der Mittelpunkte der Flächen des Büschels folgt, dass jede zur Tafel parallele Ebene die Hauptebene für eine seiner Flächen ist, deren Spur in der Tafel derjenige Kreis seines Spurenbüschels ist, der die Projection ihres Mittelpunktes zu seinem Mittelpunkte hat.

5. Die zu den erwähnten unendlich fernen Quadrupelecken gehörigen doppelt projicierenden Kegel der Durchdringung sind degeneriert in die zugehörigen Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene und der Ebene des Durchdringungskegelschnittes; je nachdem die beiden auf der Mittelpunktsgeraden im Endlichen liegenden Ecken des Quadrupels reell oder imaginär sind, werden auch die beiden eigentlichen Kegel unter den Flächen des Büschels reell existiren oder nicht. Wir unterscheiden darnach *Büschel* von parallelaxigen gleichseitigen Hyperboloiden *mit* reellen Kugeln von solchen *ohne* reelle Kegel.

Sind die Kegel reell, so haben sie in der Verbindungsebene der Axen je zwei zu diesen unter 45° geneigte Mantellinien, deren endlich entfernte Schnittpunkte ausser den Kegelspitzen die beiden Punkte des Durchdringungskegelschnittes in der Axenebene und somit seine *Scheitel* sein müssen. Unsere Kegel werden also nur dann nicht reell sein, wenn es diese Scheitel des Kegelschnittes in der Axenebene nicht sind, d. h. wenn

derselbe eine Hyperbel ist, deren Nebenaxe in der Axenebene und in der Falllinie ihrer Ebene zur Tafel liegt; und wenn also die Meridiane der Flächen in der Axenebene ein Büschel paralleler gleichseitiger Hyperbeln ohne reelle Grundpunkte im Endlichen bilden.

Im Falle reeller eigentlicher *Kegel* sind diese zugleich die *Grenz-* und *Übergangsformen zwischen den einfachen und den zweifachen Hyperboloiden* des Büschels, wie dies die Anschauung des Büschels ihrer Meridiane in der Axenebene zeigt. Sind M_1, M_2 die Mittelpunkte der Kegel, so liegen entweder die Mittelpunkte der einfachen oder die der zweifachen Hyperboloide in der endlichen Strecke $M_1 M_2$ und die der zweifachen resp. einfachen in den beiden unbegrenzten Strecken dieser Geraden ausserhalb $M_1 M_2$. Weil in dem unendlich fernen Punkte dieser Geraden Mittelpunkte der zwei in zusammenfallende Ebenenpaare degenerierten doppeltprojicierenden Cylinder des Büschels sich befinden, so verschwindet die zweite Gruppe der zweifachen resp. einfachen Hyperboloide, indem sie mit diesen ihren Grenzformen durch deren Vereinigung zusammen fällt. Wenn also die Ebene des Durchdringungskegelschnittes selbst zu den zweifachen Hyperboloiden gehört, d. h. wenn ihre Tafelneigung kleiner als 45° und somit der Kegelschnitt eine *Ellipse* ist, so liegen auf der Geraden $M_1 M_2$ in der *endlichen* Strecke zwischen diesen Punkten die Mittelpunkte der *einfachen* Hyperboloide; wenn aber die Ebene des Kegelschnittes eine Tafelneigung grösser als 45° hat, und somit zu den einfachen Hyperboloiden zählt, der Kegelschnitt also eine *Hyperbel* mit der Hauptaxe auf der Falllinie in der Axenebene ist, so liegen in der *endlichen* Strecke $M_1 M_2$ die Mittelpunkte der *zweifachen* Hyperboloide.

Wenn die Kegel nicht reell sind, der Durchdringungskegelschnitt also eine Hyperbel ist und somit seine Ebene zu den einfachen Hyperboloiden gehört, so besteht das Flächenbüschel aus *lauter einfachen* Hyperboloiden und man sieht zugleich, dass ein Büschel von lauter zweifachen Hyperboloiden mit einem reellen Durchdringungskegelschnitt nicht möglich ist. Der Fall des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel als Durchdringung schliessen sich dem unmittelbar an. Im Falle der *Parabel* hat die Ebene der Durchdringung die Tafelneigung 45° und ist zugleich der eine der beiden eigentlichen Kegel, so dass nur der letzte noch bleibt; seine Spitze M zerlegt die durch sie gehende Parallele zur Falllinie der Parabelebene als Mittelpunktsort in zwei unbegrenzte Theile, in denen

je die Mittelpunkte der einfachen und die der zweifachen Hyperboloide des Büschels sich befinden.

6. Für die in § 4 übersichtlich dargelegte Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen ergeben sich damit besonders die folgenden Resultate. Die Spurkreise der Hyperboloide des Flächenbüschels in der zu den Axen normalen Tafel bilden ein Büschel mit der Spur der Kegelschnittebene als Potenzlinie und den Schnittpunkten des Kegelschnittes mit der Tafel als Grundpunkten sowie der Spur der Axenebene als Centrale; einer unter diesen Kreisen hat den Durchstosspunkt der Mittelpunktsgeraden des Flächenbüschels in der Tafel zum Mittelpunkt und ist der reelle oder rein imaginäre Hauptkreis des entsprechenden einfachen oder zweifachen Hyperboloids; reell, wenn jener Durchstosspunkt in einer Strecke der Mittelpunkte einfacher Hyperboloide liegt, rein imaginär im andern Falle. Enthält das Flächenbüschel zwei reelle Kegel, so theilen die Mittelpunkte C_1, C_2 ihrer Spurkreise die Centrale in drei Theile, auf welche sich die Mittelpunkte der Spurkreise der einfachen und der zweifachen Hyperboloide nach den vorigen Ermittelungen vertheilen. Die Bildkreise der Punkte des Kegelschnittes stehen zu diesen Spurkreisen und speciell zur Potenzlinie ihres Büschels in den in § 4 geschilderten Beziehungen; sie berühren die Spuren der Kegel gleichartig resp. ungleichartig, sodass (vergl. § 13 und § 30) die Centra dieser Kreise die Brennpunkte der Kegelschnittprojection sind; sie schneiden jeden andern Kreis des Büschels, die Potenzlinie eingeschlossen, unter festen Winkeln, einen unter ihnen orthogonal resp. diametral, nämlich den Hauptkreis des Hyperboloids im Büschel, welches seinen Mittelpunkt in der Tafel hat: und zwar sind die Schnitte der Bildkreise mit den Spurkreisen einfacher Hyperboloide reell und mit denen der zweifachen imaginär, letzteres im Sinne von § 2. Für die verschiedenen zu den Axen desselben Flächenbüschels normalen Tafelebenen ist die Projection der Durchdringung immer sich selbst congruent, die Radien der Bildkreise ihrer Punkte verändern sich von der einen zur anderen um constante Längen, wie auch die Radien der Kegelspurkreise; für die Kreise des neuen Spurenbüschels der Flächen haben diese neuen Bildkreise wiederum, aber mit jeweilen anderen Cosinuswerthen die Qualität von gleichwinklig schneidenden Kreisen. Immer ist der einem Spurkreis entsprechende Cosinuswerth der Cotangente des Winkels gleich, unter dem das zugehörige Hyperboloid von der Tafel geschnitten wird —

in dem besonderen durch § 2 begründeten Sinne für die rein imaginären Spurkreise, die nur auftreten, wenn das Flächenbüschel reelle eigentliche Kegel enthält. Ist die Durchdringung eine Hyperbel mit der Nebenaxe in der Axenebene der Flächen, so gehen für jede Lage der Tafel die Kreise des Spurenbüschels durch zwei reelle Punkte und die Schnitte der Bildkreise mit ihnen sind ausnahmslos reell, für einen unter ihnen orthogonal. In den übrigen Fällen trennen die Spurkreise der Kegel im Büschel, die von den Bildkreisen berührt werden, die Spurkreise mit reellen von denen mit imaginären Schnitten. In der Region oder Schicht der Mittelpunkte der zweifachen Hyperboloide erscheinen dann auch, durch die der Berührung der Tafel mit zweifachen Hyperboloiden des Büschels entsprechenden Nullkreise oder Grenzpunkte von den reellen getrennt, rein imaginäre Kreise unter den Spuren.

Die Spuren in den durch die Scheitel der Durchdringung gehenden Tafelebenen sind insbesondere Büschel berührender Kreise; im Falle der parabolischen Durchdringung giebt es nur *eine* solche Lage der Tafel, die die Lagen, denen Spurenbüschel mit Grundpunkten entsprechen, von denen trennt, welche Spurenbüschel mit Grenzpunkten liefern; in jedem Spurenbüschel wird ein Kreis und die Potenzlinie von den Bildkreisen der Parabelpunkte berührt, sowie einer orthogonal resp. diametral geschnitten, und der letzten Alternative entsprechend sind die Schnitte der Bildkreise mit den Spurkreisen durchweg reell resp. imaginär. (¹)

Allgemeine Eigenschaften der Durchdringung und ihrer Projection.

7. Weil in jedem unserer Flächenbüschel mit reeller Durchdringung unendlich viele einfache Hyperboloide auftreten, aber nicht stets zweifache Hyperboloide und Kegel, so beginnen wir mit der Untersuchung der *Durchdringung von zwei einfachen Hyperboloiden.*

Die Projection derselben auf die Normalebenen zu den Axen ist die *Construction eines Kegelschnittes aus zwei reellen Kreisen die ihn doppelt be-*

(¹) Für weitere Ausführungen verweise ich auf meine *Cyklographie* (Leipzig, Teubner 1882. 263 p. 8° mit 16 lithogr. Tafeln).

rühren; diese Kreise sind die Projectionen der Kehlkreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ der sich durchdringenden Hyperboloide, weil in allen Punkten des Kehlkreises die Tangentialebenen des Hyperboloides normal zur Ebene desselben stehen (§ 1) und die Tangente des Durchdringungskegelschnittes in jedem seiner Durchschnittspunkte P, P' mit dem Kehlkreis sich zusammenfallend mit seiner Tangente in demselben Punkte projiciert. Wir sehen damit sogleich auch, dass die reellen doppelt berührenden Kreise sich theilen werden in solche, welche reell und solche, welche imaginär doppelt berühren; die Projection der Durchschnittslinie zwischen der Kehlkreisebene und der Ebene des Durchdringungskegelschnittes ist die zugehörige *Sehne* s_1 resp. s_2 *der doppelten Berührung* und ihr *Pol* S_1 resp. S_2 in Bezug auf die Kehlkreisprojection $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ projiciert die Schnittpunkte der Paare von geraden Mantellinien des bezüglichen Hyperboloids, die von jenen Punkten P und P' ausgehen. Berührt die Sehne s den zugehörigen Kreis, so ist der Berührungspunkt einer der in der Centrale liegenden Scheitel der Kegelschnittprojection und der Pol S fällt mit ihm zusammen; beide Berührungsstellen zwischen Kreis und Kegelschnitt sind zu einer *vierpunktigen Berührung* in diesem Scheitel des letzteren zusammengerückt; offenbar bildet diese vierpunktige Berührung den Übergang von den reell doppelten zu den imaginär doppelten Berührungen reeller Kreise mit der Projection des Kegelschnittes. Wenn die in der Axenebene liegenden Scheitel des Durchdringungskegelschnittes nicht reell sind, also nach § 5 das Flächenbüschel keine eigentlichen Kegel enthält, so giebt es solche Übergänge nicht, und alle so entstehenden reellen Kreise berühren die Kegelschnittprojection reell doppelt.

Enthält das Flächenbüschel *reelle Kegel*, so sind die Projectionen ihrer *Mittelpunkte* oder Spitzen die *doppelt berührenden Kreise vom Radius Null* für die Projection der Durchdringung; nach der Bedeutung der Kegelspitzen in der Mittelpunktslinie bilden sie den Übergang von den reellen zu den imaginären doppelt berührenden Kreisen aus Punkten derselben Axe, welche in diesem Falle immer die Hauptaxe der Kegelschnittprojection ist; sie gehören selbst zu den reellen Kreisen, welche imaginär doppelt berühren, und die Sehne dieser Berührung ist die Projection der Schnittlinie der Kegelschnittebene mit der durch die betreffende Kegelspitze gehenden Normalebene zu den Axen als der Hauptebene des Kegels. Wir kommen darauf zurück (§ 30).

Auf dem einfachen gleichseitigen Rotationshyperboloid gehen *durch jeden Punkt P zwei* zur Axe wie zu ihren Normalebenen unter 45° geneigte *gerade Mantellinien:* sie liegen in der durch ihn gehenden zur Axe parallelen Ebenen, welche seinen Kehlkreis berühren und sind daher in den Tangenten an die Kehlkreisprojection $\mathfrak{K}_1$ projiciert, welche von der Projection von P ausgehen. Die Länge dieser Tangenten von dieser Projection bis zur Berührungsstelle ist der in der Richtung der Axe gemessenen Entfernung d des Punktes selbst von der Kehlkreisebene gleich und verhält sich daher zur Länge der Mantellinien zwischen dem Punkte und dem Kehlkreis des Hyperboloids wie $1:\sqrt{2}$. Diese Länge der Mantellinien ist also für alle Punkte eines zur Tafel parallelen Querschnittes oder Parallelkreises $\mathfrak{P}_1$ dieselbe; und wenn wir *zwei Parallelkreise* $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ des nämlichen Hyperboloides betrachten, so erkennen wir die Länge seiner Mantellinien zwischen denselben als constant, nämlich das $\sqrt{2}$-fache der in der Richtung der Axe gemessenen Distanz d_{12} jener Ebenen, und die Projection jener Längen, die dieser Distanz gleich ist, als die auf den Tangenten der Kehlkreisprojection $\mathfrak{K}$ von den Projectionen jener Parallelkreise $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ bestimmte Sehne (Fig. 1); und zwar liegt der Berührungspunkt an der Kehlkreisprojection zwischen den Endpunkten der bezüglichen Sehnenlänge oder nicht, je nachdem der Kehlkreis selbst innerhalb oder ausserhalb der durch jene Parallelkreisebene begrenzten *Schicht* des Raumes liegt, oder die Distanz d_{12} ist in jenem Falle die halbe Summe und in diesem die halbe Differenz der in den Kreisen $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_1$ auf Tangenten von $\mathfrak{K}$ gelegenen Sehnen. Insbesondere ist die Länge einer Kehlkreistangente bis zur Projection des Parallelkreises $\mathfrak{P}$ die Distanz der Ebene des letzteren von derjenigen des Kehlkreises.

Betrachten wir nun den *Querschnitt* eines solchen Hyperboloids mit einer Ebene, die wir durch ihre Spur in seiner Hauptebene und ihren Neigungswinkel α gegen diese bestimmt denken, so ist für jeden seiner Punkte die Länge der von seiner Projection auf die Hauptebene an den Kehlkreis gehenden Tangenten seinem Abstand von dieser Ebene gleich; und da $\operatorname{tg}\alpha$ das Verhältniss der Entfernung irgend eines Punktes der Ebene von der Kehlkreisebene zum Abstand seiner Projection von ihrer Spur in dieser Ebene ist, so erkennt man für *alle Punkte der Projection desselben Querschnittes das Verhältniss der ihnen zukommenden Kehlkreistangentenlängen zu ihren Abständen von der Spur als constant;* oder die

Punkte eines Kegelschnittes haben für einen seiner reellen doppelt berührenden Kreise Tangentenlängen und von seiner Berührungssehne Abstände, deren Verhältniss für alle dasselbe ist: insbesondere für die Parabel gleich Eins.

8. Wenn zwei einfache gleichseitige Rotationshyperboloide von parallelen Axen, deren Hauptebenen die Distanz d von einander haben, einen reellen Kegelschnitt als *Durchdringung* erzeugen, so ist jeder Punkt P desselben der Schnittpunkt von zwei Mantellinien der einen mit zwei Mantellinien der andern Fläche, die in der Projection als die 2 Tangenten aus seiner Projection P' an die Projectionen der Kehlkreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ erscheinen, und die Längen t_1, t_2 derselben von P' bis zu den respectiven Berührungspunkten sind nach § 7 zugleich die in der Richtung der Axen gemessenen Distanzen von P bis zu den Kehlkreisebenen. In Folge dessen ist für alle Punkte des Kegelschnittes *innerhalb* der Schicht zwischen den Kehlkreisebenen beider Hyperboloide die *Summe* und für alle Punkte desselben *ausserhalb* dieser Schicht die *Differenz* jener Tangentenlängen t_1, t_2 *constant*, nämlich *der Distanz d der Kehlkreisebenen gleich.* Und der Ort eines Punktes, für welchen die Summe oder der Unterschied der Längen der von ihm an zwei feste Kreise seiner Ebene gehenden Tangenten constant bleibt, ist ein Kegelschnitt, der diese beiden Kreise je doppelt berührt und dessen eine Axe in ihre Centrale fällt — der erste Hauptsatz in St. 1852 (p. 447), mit dessen Entwickelung sich diese Abhandlung alsbald ausschliesslich beschäftigt.

Nach dem Schluss von § 7 tritt zu ihm der Satz: Für alle doppelt jedoch nicht umschliessend berührenden Kreise eines Kegelschnittes aus Punkten derselben Axe ist das Verhältniss der Summe oder Differenz der Längen der Tangenten, die von einem seiner Punkte an sie gehen, zum Abstand von ihren Berührungssehnen eine Constante; für die Parabel speciell gleich Eins.

Wenn der Durchdringungskegelschnitt die Ebenen beider Kehlkreise reell durchschneidet, so wird dadurch sein Umfang in *drei Theile* zerlegt, von denen die zwei ausserhalb der Schicht der Kehlkreisebenen gelegenen den dritten in derselben einschliessen; in diesem findet die constante Summe, in jenen beiden die constante Differenz statt für die Längen der Mantellinien auf der Fläche wie für die der Kreistangenten in der Projection. In den bezeichneten Durchgangspunkten selbst sind die Längen

der Mantellinien des einen Hyperboloids gleich Null und die des andern gleich $d\sqrt{2}$, wie die Tangenten in der Projection von den Berührungspunkten des Kegelschnittes mit dem einen Kreis an den andern gleich d selbst. Geht der Durchdringungskegelschnitt nur durch den einen der Kehlkreise reell hindurch, so zerfällt er wie seine Projection dadurch in *zwei* Theile, mit constanter Summe in dem einen der Schicht angehörigen und mit constanter Differenz in dem anderen; schneidet er endlich keinen von beiden reell, so findet für seinen resp. seiner Projection ganzen Umfang constante Summe resp. Differenz statt, $d\sqrt{2}$ im Raume, d in der Projection.

In jedem Falle erhält man hiernach aus den Projectionen der Kehlkreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ von zwei Hyperboloiden und der Distanz d ihrer Hauptebenen sofort die *Elemente der Doppelberührung* mit diesen Kreisen für die Projection der Durchdringung. Trägt man auf eine Tangente des Kreises $\mathfrak{K}_1$ und auf eine Tangente des Kreises $\mathfrak{K}_2$ vom Berührungspunkte weg die Länge d ab, so ist der zu $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ concentrische Kreis $\mathfrak{K}_{1d}$ resp. $\mathfrak{K}_{2d}$ durch den jeweilen erhaltenen Endpunkt die Projection des Parallelkreises des ersten resp. des zweiten Hyperboloides, welcher mit dem Kehlkreis des jeweilen anderen in derselben Ebene liegt. Im Fall reeller Schnitte sind daher die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und die von $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ die Berührpunkte, und die zugehörigen Tangenten von $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ die Tangenten der Projection mit diesen Kreisen. Nach der stereometrischen Bedeutung dieser Kreise erhält man aber auch im Falle nicht reellen Schnittes in den Potenzlinien von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und von $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ die Sehnen s_1, s_2 und in ihren Polen S_1, S_2 in $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ resp. die Pole der bezüglichen Doppelberührungen. (Vergl. St. 1852; p. 452.) Wir wollen anmerken, dass man die Elemente der Berührung mit den Grundkreisen für die Curven vierter Ordnung des § 3 in ähnlicher Weise bestimmen kann.

9. Diese Construction erlaubt uns auch, *die beiden Kegelschnitte* in der Tafel zu bestimmen, welche einen festen Punkt P enthalten und zwei gegebene ihn nicht umschliessende reelle Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ doppelt berühren. Zieht man nämlich von P die Tangenten von den Längen t_1 und t_2 an diese Kreise, so giebt $(t_1 + t_2)$ die Distanz d_i der Kehlkreisebenen für ein Paar von Hyperboloiden, deren Durchdringungsprojection $\mathfrak{S}_i$ jene Bedingungen so erfüllt, dass der Punkt P das Bild eines Punktes derselben

zwischen den Kehlkreisebenen ist und $t_1 - t_2$ (für $t_1 > t_2$) die Distanz d_e für die Hauptebenen von zwei Hyperboloiden gleicher Bedeutung, für die das Original von P ausserhalb jener Schicht liegt. Nach der vorher entwickelten Regel erhält man die Elemente der Doppelberührungen für beide Kegelschnitte $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_e$. Man construiert auch nach den Regeln der darstellenden Geometrie die Tangenten t_i und t_e der beiden Kegelschnitte in P als Projectionen der bezüglichen Tangenten der Durchdringungen mit den Distanzen d_i und d_e; man hat nur die Tafelspuren der Tangentialebenen beider Hyperboloide in dem in P projicierten Punkte der Durchdringung zu bestimmen und ihren Schnittpunkt, den Durchstosspunkt der Tangente der Durchdringung, mit P zu verbinden. Zur Ausführung (Fig. 2) denkt man etwa die Ebene des Kehlkreises $\mathfrak{K}_1$ als Tafelebene und erhält die Spur der Tangentialebene des ersten Hyperboloides als die Berührungssehne der von P an $\mathfrak{K}_1$ gehenden Tangenten, der Projectionen seiner Mantellinien durch den Punkt der Durchdringung in beiden Fällen; die Spur der Tangentialebene des zweiten Hyperboloids im Original von P ist der Polare von P in $\mathfrak{K}_2$ parallel und geht durch die Durchstosspunkte der in ihnen projicierten Mantellinien durch jenen mit der Tafel, die man erhält, indem man die Tangenten mit dem von P aus mit der Länge t_1 beschriebenen Kreise schneidet. In Folge dessen fallen sie und die Tangenten nur für P auf der einen Kreisperipherie und für P als eine Richtung zusammen; im ersten Falle ist die Tangente ohnediess bestimmt, im andern ist sie rechtwinklig auf der Richtung von P. (Vergl. § 17.) Man bemerke noch den Specialfall, wo $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ Kreise vom Radius Null sind.

Durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 und einen doppelt berührenden Kreis $\mathfrak{K}$ werden *vier Kegelschnitte* bestimmt, die wir als ebene Querschnitte des Hyperboloides mit dem Kehlkreis $\mathfrak{K}$ sofort construieren können. Die Punkte P_i sind die Orthogonalprojectionen von drei Punktpaaren in dieser Fläche, welche, zu dreien von den Projectionen P_1, P_2, P_3 mit einander combiniert, vier zur Tafel symmetrische Ebenenpaare bestimmen. Weil jene Punkte der Fläche cyklographisch durch die um P_1, P_2, P_3 beschriebenen zu $\mathfrak{K}$ orthogonalen Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ dargestellt werden (Fig. 3), so sind die vier Verbindungslinien s_i ihrer Ähnlichkeitspunkte zu dreien die Spuren jener Ebenen und daher auch die Sehnen der Doppelberührung der vier Kegelschnitte mit dem Kreise $\mathfrak{K}$. Wir erhalten überdiess ihre

Tangenten in den Punkten P_i, da ihre Durchstosspunkte in der Ebene von $\mathfrak{K}$ die Schnittpunkte ihrer Polaren P_i im Kreise $\mathfrak{K}$ mit den vier Ähnlichkeitsaxen der Kreise $\mathfrak{K}_i$ sind. Auch die Specialfälle der Construction, wo P_3 auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ liegt, $\mathfrak{K}_3$ sich auf diesen Punkt reduciert und nur zwei Ähnlichkeitsaxen und Kegelschnitte erhalten werden und wo P_3 und P_2 dem Kreise $\mathfrak{K}$ angehören und als einzige Ähnlichkeitsaxe der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ die Gerade P_2P_3 erhalten wird, sind bemerkenswerth.

10. Die Mantellinien g_1, l_1 des ersten und die g_2, l_2 des zweiten Hyperboloids in einem Punkte P der Durchdringung bestimmen mit einander ausser den Tangentialebenen g_1l_1 und g_2l_2, die sich in der Tangente t der Durchdringung schneiden, noch vier Ebenen g_1l_2, g_2l_1, g_1g_2, l_1l_2, deren jede eine Mantellinie des einen mit einer Mantellinie des andern Hyperboloids verbindet und somit beide Hyperboloide berührt. Lässt man P die ganze Durchdringung durchlaufen, so erhält man durch diese Construction die Gesammtheit der gemeinsamen Tangentialebenen beider Flächen; auch liefert jede der gemeinsamen Tangentialebenen beider Flächen, weil sie dieselben in zwei Paaren von Mantellinien g_1l_1 und g_2l_2 schneidet, vier Punkte der Durchdringung derselben g_1l_2, g_2l_1, g_1g_2, l_1l_2, von denen zwei zum endlichen Theil der Durchdringung d. h. zum Kegelschnitt gehören, indess die beiden anderen auf dem unendlich fernen gemeinsamen Querschnitt der Flächen liegen, weil jene vier Geraden als 45° Linien auf einerlei Ebene in Paaren parallel sein müssen. Man sagt, die *gemeinsame Curve* und die *gemeinsame Developpable* beider Flächen liegen *perspectivisch* zu einander. Im Allgemeinen gehen durch jeden Punkt des Raumes vier gemeinsame Tangentialebenen beiden Flächen oder die gemeinsame Developpable derselben ist *vierter Classe*, wie die gemeinsame Curve *vierter Ordnung*. Wir betrachten diejenigen, welche die Axenrichtung der Flächen enthalten oder zur Tafel normal sind, ihre Berührungspunkte mit den Flächen also in den Kehlkreisen derselben haben und in den vier gemeinsamen Tangenten der Kehlkreisprojectionen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ projiciert sind. In einer dieser gemeinsamen Tangenten t sind die zwei Paare der in der zugehörigen Ebene enthaltenen Mantellinien g_1, g_2, l_1, l_2 der Flächen projiciert und sie bilden in jener ein Rechteck aus 45° Linien, die in Paaren durch die Berührungspunkte P_1, P_2 an den resp. Kehlkreisen gehen, welches wir durch Umlegung in die Ebene des Kehlkreises $\mathfrak{K}_1$ zur Anschauung bringen. Die Mantellinien g_1, l_1 der ersten Fläche sind

dann die zur Tangente t in T_1 unter 45° geneigten Geraden und die Mantellinien g_2, l_2 der zweiten ihre Parallelen durch einen in der Normale zu t in T_2 um die Distanz d der Kehlkreisebenen von T_2 entfernten Punkt T_2^0 (Fig. 4); die Richtungen der g und der l sind die in dieser Ebene liegenden Punkte des gemeinsamen unendlich fernen Querschnittes der Flächen, die beiden Schnittpunkte P_{12} von $g_1 l_2$ und P_{21} von $g_2 l_1$ die zugehörigen Punkte des Durchdringungskegelschnittes und die von ihnen zur Tangente t gefällten Perpendikel liefern ihre Projectionen P_1, P_2 in dieser. Zieht man durch T_2^0 die Parallele zur Tangente t, so wird diese von den Senkrechten $P_{21}P_2$ und von den zu l_1, l_2 parallelen Geraden durch P_1 in demselben Punkte P_2^0 geschnitten und man hat

$$d = T_2 T_2^0 = P_2 P_2^0 = P_2 P_1$$

d. h. *die Projection der Durchdringungscurve bestimmt in jeder der gemeinsamen Tangenten eine Sehne* $P_1 P_2$, *welche der zugehörigen Distanz* d *der Kehlkreisebenen gleich ist.*

Markieren wir ferner in der Centrale $C_1 C_2$ der Kehlkreisprojectionen die Mitte M, so geht die von dort zur Tangente gefällte Senkrechte sowohl durch die Mitte von $P_1 P_2$ als durch die der Geraden $P_{12}P_{21}$, der Spur der Ebene des Durchdringungskegelschnittes in der gemeinsamen Tangentialebene; in Folge des ersteren ist auch $MP_1 = MP_2$ und zudem ist die Mitte von $P_1 P_2$ zugleich die Mitte von $T_1 T_2$, d. h. der Schnittpunkt der Tangente mit der Potenzlinie p der Kehlkreisprojectionen. Oder *jene vier der Distanz* d *gleichen Sehnen des Kegelschnittes auf den gemeinsamen Tangenten der Kehlkreisprojectionen haben ihre Mitten in der Potenzlinie der letzteren und ihre vier Endpunkte für die äusseren und resp. die inneren gemeinsamen Tangenten je auf einem Kreis* $\mathfrak{K}$, *der die Mitte* M *der Centrale* $C_1 C_2$ *zum Mittelpunkt hat:* die Perpendikel, die man auf ihnen in ihren Schnittpunkten mit der Potenzlinie errichtet, gehen durch die Mitte der Centrale; die vier Berührungspunkte der äusseren gemeinsamen Tangenten und wieder die der inneren mit $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ liegen auf zwei Kreisen um denselben Punkt M.

Jenes liefert bequeme Mittel zur Construction unseres Kegelschnittes, die man bei St. 1852; p. 455 f. auch findet. Ihre Umkehrung giebt den Satz: Jeder Kegelschnitt, welcher zwei feste reelle Kreise nach parallelen Sehnen doppelt berührt, ist die Projection der Durchdringung von zwei

gleichseitigen einfachen Rotationshyperboloiden mit jenen als Kehlkreisprojectionen und der gleichen Länge seiner Sehnen in ihren gemeinsamen Tangenten als Distanz ihrer Kehlkreisebenen. Der Kegelschnitt kann also die gemeinsamen Tangenten nur *berühren* für $d = 0$ und in der Potenzlinie der Kreise: Die doppelt gezählte Potenzlinie ist der Kegelschnitt, die Projection der Durchdringung (§ 3). Da ferner die äusseren sowohl wie die inneren gemeinsamen Tangenten t_e, t_i der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ je einen solchen Kegelschnitt bilden, so erhalten wir den Satz: Die Länge der äusseren gemeinsamen Tangenten zwischen ihren Berührungspunkten ist zugleich die Länge der inneren gemeinsamen Tangenten zwischen den äusseren; und die Länge der inneren gemeinsamen Tangenten zwischen den Berührungspunkten ist die der äusseren zwischen den inneren. (St. 1852; p. 450.) Diese Längen sind die Distanzen der Kehlkreisebenen der Hyperboloide, deren Durchdringungen in Linienpaare zerfallen oder die sich in einem Punkte der Axenebene berühren; die Paare der gemeinsamen Tangenten sind die Projectionen dieser Durchdringungen und die Ähnlichkeitspunkte E und I die der Berührungspunkte.

11. Wir erhalten leicht die Bestätigung und einige Erweiterungen des Vorigen in der früher eingeführten analytischen Ausdrucksform. Weil man für einen in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten in der Form

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

gegebenen Kreis das Quadrat der Längen der vom Punkte (X, Y) an ihn gehenden Tangenten durch die Substitution von X, Y für x, y resp. in die linke Seite erhält, so ist mit K_1 und K_2 als Symbolen für $(X + c)^2 + Y^2 - r_1^2$ und $(X - c)^2 + Y^2 - r_2^2$ resp. die Gleichung der Durchdringungsprojection der Hyperboloide

$$(x + c)^2 + y^2 - z^2 - r_1^2 = 0, \qquad (x - c)^2 + y^2 - (z + d)^2 - r_2^2 = 0$$

$$\sqrt{K_1} \pm \sqrt{K_2} = d \quad \text{oder} \quad (K_1 + K_2 - d^2)^2 = 4K_1 K_2$$

d. i. auch

$$d^4 - 2d^2(K_1 + K_2) + (K_1 - K_2)^2 = 0.$$

Wegen

$$K_1 - K_2 = 4cx + r_2^2 - r_1^2$$

und

$$K_1 + K_2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) - (r_1^2 + r_2^2)$$

wird dies

$$4x^2(4c^2 - d^2) + 4d^2y^2 - 8cx(r_1^2 - r_2^2) + (r_1^2 - r_2^2)^2 - 2d^2(2c^2 - r_1^2 - r_2^2) + d^4 = 0,$$

die auch durch Elimination von z zwischen den Gleichungen der Hyperboloide entstehende Gleichung; mit $d = c\sqrt{2}$ drückt sie eine gleichseitige Hyperbel aus, für $d = 2c\sqrt{2}$ eine specielle Ellipse, der wir weiterhin auch begegnen. Verbindet man nun die Gleichungen für zwei Distanzen d, d_1 in der Symbolform durch Subtraction, so erhält man nach Division mit $(d^2 - d_1^2)$ die Gleichung

$$d^2 + d_1^2 - 2(K_1 + K_2) = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\{2(r_1^2 + r_2^2) - 4c^2 + d^2 + d_1^2\};$$

d. h. *die gemeinsamen Punkte von zwei Kegelschnitten welche dieselben festen Kreise je doppelt berühren, liegen immer auf einem um die Mitte der Centrale dieser Kreise beschriebenen Kreis.* (St. 1852; p. 455.) Und durch die vier Schnittpunkte eines solchen Kreises mit einem doppelt berührenden Kegelschnitt geht stets noch ein zweiter Kegelschnitt, der dieselben Kreise doppelt berührt. Insbesondere folgt für

$$d^2 = t_i^2 = 4c^2 - (r_1 + r_2)^2 \quad \text{und} \quad d_1^2 = t_e^2 = 4c^2 - (r_1 - r_2)^2$$

die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

oder die Schnittpunkte der äusseren mit den inneren gemeinsamen Tangenten liegen auf dem über der Centrale als Durchmesser beschriebenen Kreis. (St. 1852; p. 450.) Für $d_1^2 = t_e^2$ und resp. $d_1^2 = t_i^2$ erhalten wir als Radienquadrate der beiden Kreise, in welchen der der Distanz d entsprechende Kegelschnitt die äusseren und die inneren gemeinsamen Tangenten schneidet, die Werthe mit constanter dem geometrischen Mittel der Radien gleicher Differenz

$$\frac{1}{4}\{(r_1 + r_2)^2 + d^2\} \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}\{(r_1 - r_2)^2 + d^2\}.$$

die daher nur gleich werden, wenn einer der Radien den Werth Null hat, womit in der That die beiden Paare gemeinsamer Tangenten sich vereinigen.

12. Wenden wir unsere elementaren Formeln auch auf die Bestimmung der Berührungselemente in § 8 an, so erhalten wir weitere Ergebnisse. Die dort benutzten Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ haben die Gleichungen

$$(x+c)^2+y^2-r_1^2=0, \qquad (x-c)^2+y^2-(r_2^2+d^2)=0;$$

$$(x-c)^2+y^2-r_2^2=0, \qquad (x+c)^2+y^2-(r_1^2+d^2)=0$$

und liefern als *Sehnen der Doppelberührungen* ihre Potenzlinien

$$4cx=r_1^2-r_2^2-d^2, \qquad 4cx=r_1^2-r_2^2+d^2;$$

d. h. dieselben sind äquidistant von der durch $4cx=r_1^2-r_2^2$ dargestellten Potenzlinie der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, welche auch die von $\mathfrak{K}_{1d}$, $\mathfrak{K}_{2d}$ ist.

Die Berührungspunkte selbst oder die Schnitte von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und von $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ liegen in dem aus der Mitte der Centrale beschriebenen *Kreise* $\mathfrak{K}$, dessen Gleichung die Summe der Gleichungen von jenen ist und der somit das *Radiusquadrat* $\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+d^2)-c^2$ hat. Es wird für $d^2=t_e^2$ resp. $d^2=t_i^2$ zu $c^2+r_1r_2$ und $c^2-r_1r_2$ und man sieht, dass die Summe und Differenz der Radienquadrate der Kreise durch die vier Berührungspunkte der äusseren und die vier der inneren gemeinsamen Tangenten zweier Kreise gleich der Hälfte vom Quadrat ihrer Centraldistanz und resp. gleich dem doppelten Product ihrer Radien ist.

Jeder Kreis $\mathfrak{K}$, welcher um die Mitte der Centrale beschrieben wird, schneidet die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in je zwei Punkten, welche Berührungspunkte desselben sie doppelt berührenden Kegelschnittes sind. (St. 1852: p. 454.) Ist R sein Radius, so erhält man die zugehörige Distanz d aus der Relation $d^2=2(R^2-c^2)-(r_1^2+r_2^2)$ und man construiert sie, indem man den mit $\mathfrak{K}_2$ concentrischen Kreis $\mathfrak{K}_{2d}$ beschreibt, der mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ dieselben Schnittpunkte — die Berührungspunkte — oder dieselbe Potenzlinie — Berührungssehne — hat, als die halbe $\mathfrak{K}_2$ berührende Sehne desselben; etc

Die Sehnen der doppelten Berührung an $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ haben nach ihren Ausdrücken die gleichen Abstände $d^2:4c$ von der Potenzlinie der Kreise und somit den Abstand $d^2:2c$ von einander; da nun die eine derselben in der um die Distanz d höher gelegenen Kehlkreisebene des zweiten Hyperboloids liegt, so ist $d:2c$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Ebene des Durchdringungskegelschnittes mit den Axen der Hyperboloide einschliesst, oder diese ist ein constantes Vielfaches der Distanz. Die Subtraction der Gleichungen der sich durchdringenden Hyperboloide

$$(x+c)^2+y^2-z^2=r_1^2 \quad \text{und} \quad (x-c)^2+y^2-(z+d)^2=r_2^2$$

führt mit

$$2cx+dz=\frac{1}{2}(r_1^2-r_2^2-d^2)$$

als Gleichung der Durchdringungsebene zu demselben Resultat; mit Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten in die Potenzlinie wird diese Gleichung zu

$$2cx+dz=-\frac{1}{2}d^2.$$

Aus jener Proportionalität folgt aber, *dass die Spur der Ebene der Durchdringung in der Axenebene der Flächen eine Parabel umhüllt*, welche in der Umlegung der Axenebenen um die Centrale C_1C_2 in die Tafel dadurch definiert ist, dass die Centrale ihre Axe und die Potenzlinie p von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ ihre Scheiteltangente ist, indess ihre Directrix und ihr Brennpunkt im Abstand c von der Potenzlinie resp. auf der Seite des in der Tafel und des im Abstand d von ihr entfernten Kehlkreises liegen; denn für $d=2c$ erhält man die Parabel als Durchdringung, weil dann der Mittelpunkt der zweiten Fläche im Asymptotenkegel der ersten liegt mit einerlei Tangentialebenen für beide Kegel längs der verbindenden Mantellinie, oder auch gemäss der Gleichung der Durchdringungsprojection in § 11, in welcher dann das Glied mit x^2 verschwindet. Für jede Distanz d ist die zweite Tangente dieser Parabel aus dem Punkte der Scheiteltangente im Abstande $\frac{1}{2}d$ vom Scheitel die Spur der Durchdringungsebene in der Axenebene; ihr Berührungspunkt mit der Parabel liegt in

der Potenzlinie p_2 von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{K}_{1d}$ und die beiden symmetrischen Tangenten der Parabel aus den Punkten in $\pm\frac{1}{2}d$ liefern nach der orthogonalen Symmetrie der bezüglichen Hyperboloide $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_2'$, als Spuren der Durchdringungsebene genommen, einerlei Durchdringungsprojection.

13. Wir denken nun zu der *Parabel* des Vorigen die *Meridianhyperbel* des Hyperboloides $\mathfrak{K}_1$ in der Axenebene hinzu, also die gleichseitige Hyperbel, welche die in der Centrale liegenden Punkte A_1, B_1 des Kreises $\mathfrak{K}_1$ zu Scheiteln hat. Eine Tangente der Parabel schneidet dieselbe im Allgemeinen in zwei Punkten A, B, welche so lange sie reell sind die *Hauptaxenscheitel* des Durchdringungskegelschnittes bilden (§ 5); die von ihnen auf die Centrale der Kreise gefällten Perpendikel markieren in dieser die *Scheitel der Projection;* wenn jene imaginär sind, so ist die Projection eine Hyperbel, deren Nebenaxe in der Centrale liegt. Zieht man durch jene Schnittpunkte A, B die zu den Axen unter 45° geneigten Geraden, so schneiden sich diese als in der Axenebene liegende Mantellinien der durch die Durchdringung gehenden gleichseitigen Rotationskegel in zwei Punkten M_1, M_2 im Endlichen, die die Mittelpunkte dieser Kegel sind; auch ist der Schnittpunkt der Geraden AB und M_1M_2 der *Mittelpunkt* des Kegelschnittes und das von ihm zur Centrale gefällte Perpendikel liefert in dieser den Mittelpunkt der Projection. Ebenso erhält man in den Fusspunkten der von M_1 und M_2 zur Centrale erfällten Perpendikel die *Brennpunkte* der Projection; denn das allgemeine Gesetz der constanten Summe oder Differenz der Tangentenlängen zweier doppelt berührenden Kreise aus allen Punkten des Kegelschnittes geht in das von der constanten Summe oder Differenz der Abstände von jenen Fusspunkten über und gilt resp. für den ganzen Umfang der elliptischen oder hyperbolischen Durchdringungsprojection, weil die Doppelberührungen mit Kreisen vom Radius Null nothwendig imaginär sind; diese Constante, die Distanz d der Kehlkreisebenen, ist der in der Richtung der Axen gemessene Abstand der Kegelspitzen M_1, M_2 und daher zugleich der in der Richtung ihrer Normalen gemessene Abstand der Scheitel A, B, d. h. die Hauptaxe der Durchdringungsprojection. (Vergl. § 9.) Auch das Verhältniss der Entfernung eines Punktes von einem Nullkreise oder Brennpunkt zu seinem Abstand von der zugehörigen Berührungssehne oder Directrix d. h. die numerische Excentricität ist constant, näm-

lich der Tangente der Winkels α der Durchdringungsebene zur Tafel gleich, in Übereinstimmung damit, dass den Fällen $\alpha \gtreqless 45^\circ$ Ellipsen, die Parabel und Hyperbeln resp. entsprechen. (1)

Fallen die Scheitel A, B zusammen oder berührt die Spur der Durchdringungsebene die Meridianhyperbel von $\mathfrak{K}_1$ in der Axenebene, so vereinigen sich auch die Kegelspitzen M_1, M_2 mit ihnen, die Schicht hat die Höhe Null, die Durchdringung wie ihre Projection bestehen aus zwei zur Axenebene symmetrischen Geraden; jene aus den gemeinsamen Mantellinien der beiden Hyperboloide durch den Punkt AB, diese aus dem entsprechenden Paar der gemeinsamen Tangenten der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, wie wir aus § 11 schon wissen. Wenn aber die Tangente der Parabel die Meridianhyperbel nicht reell trifft, wozu die Berührung zwischen beiden den Übergang bilden wird, so hat das Flächenbüschel der bezüglichen Hyperboloide keine reellen Kegel und die Brennpunkte der Projection des Durchdringungskegelschnittes liegen nicht in der Centrale, sondern in einer Normale zu ihr als ihrer Hauptaxe.

Für die Bestimmung der *Brennpunkte und Hauptaxenscheitel* der Durchdringungsprojection bieten aber auch die *Elemente ihrer Doppelberührung mit den Kreisen* in der Tafel $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ die ausreichenden Mittel, und nach der nicht projectivischen Natur der Brennpunkte ist zu erwarten, dass nur diese in allen Fällen zum Ziele führen werden. Sind s_1, s_2 die aus der bekannten Distanz d nach § 8 ermittelten Sehnen der Doppelberührung mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ respective und S_1, S_2 die zugehörigen Pole derselben, so bestimmen die beiden Paare C_1, S_1 und C_2, S_2 die *Brennpunktsinvolution* des Kegelschnittes, d. h. eine Involution, deren Doppelpunkte die Brennpunkte sind, während ihr Mittelpunkt auch der Mittelpunkt des Kegelschnittes ist. Zugleich liefern die Doppelpunkte der zweiten Involution, in welcher den Punkten S_1, S_2 die Schnittpunkte der Centrale mit den Berührungssehnen s_1, s_2 entsprechen, die in der Centrale liegenden Scheitel des Kegelschnittes. Die Doppelpunkte beider Involutionen sind gleichzeitig reell und resp. imaginär. Weil aber die reellen Brennpunkte des Kegelschnittes die Scheitelpunkte rechtwinkliger Polarinvolutionen in Bezug auf ihn sind, so erhält man sie dann, wenn jene Paare sich trennen, als die reellen Grundpunkte des Büschels von Kreisen, welches über den

(1) Für weitere Ausführung vergl. meine *Cyklographie*, Abschnitt IV.

Segmenten C_1S_1, C_2S_2 der Involution als Durchmessern gebildet wird; die Potenzlinie dieses Büschels ist die Hauptaxe des Kegelschnittes und in derselben erhält man dann auch die Scheitel wieder durch einen Punkt und die zugehörige Tangente des Kegelschnittes. Im andern Falle sind die Brennpunkte die Grenzpunkte oder Nullkreise desselben Büschels und seine Potenzlinie ist die Nebenaxe des Kegelschnittes. (Fig. 5.)

14. Diese Construction bequemt sich leicht unserer elementaren Rechnung an und wird durch dieselbe dadurch näher bestimmt, dass zu dem Büschel dieser Kreise stets auch der Ähnlichkeitskreis $\mathfrak{K}_a$ von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gehört, so dass die reellen Brennpunkte, wenn sie in der Centrale liegen, mit den Ähnlichkeitspunkten I und E eine harmonische Gruppe bilden und wenn die Centrale die Nebenaxe ist, auf dem Ähnlichkeitskreis $\mathfrak{K}_a$ liegen. Denn für die gegebenen Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ resp. als

$$(x+c)^2 + y^2 - r_1^2 = 0, \qquad (x-c)^2 + y^2 - r_2^2 = 0$$

sind die über den Durchmessern C_1S_1 und C_2S_2 beschriebenen oder den von jenen resp. mit dem Kreis $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ um die Mitte der Centrale bestimmten Büscheln angehörigen Kreise durch C_1 resp. C_2 ausgedrückt durch

$$(x^2 + y^2)(c^2 - R^2 + r_1^2) + 2cx(c^2 - R^2) + c^2(c^2 - R^2 - r_1^2) = 0,$$

$$(x^2 + y^2)(c^2 - R^2 + r_2^2) - 2cx(c^2 - R^2) + c^2(c^2 - R^2 - r_2^2) = 0$$

resp., so dass ihre Potenzlinie und damit der *Mittelpunkt* des Kegelschnittes durch die *Abscisse*

$$x = \frac{c(r_1^2 - r_2^2)}{2(c^2 - R^2) + r_1^2 + r_2^2}$$

bestimmt ist. Dabei ist die Gleichung des *Ähnlichkeitskreises*, weil sein Mittelpunkt als Mitte zwischen I und E die Abscisse $c\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$ hat und sein Radius $\frac{2cr_1r_2}{r_1^2 - r_2^2}$ ist,

$$x^2 + y^2 - 2cx\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + c^2 = 0,$$

und man sieht, dass seine Potenzlinie mit jedem der beiden ersten Kreise dieselbe ist, wie die oben bestimmte dieser Kreise selbst.

Die Gleichung derselben zeigt, dass sie für $c = 0$ und für $r_1^2 = r_2^2$ immer mit der Senkrechten in der Mitte der Centrale zusammenfällt; wie denn die räumliche Anschauung sofort zeigt, dass die bezüglichen Durchdringungsprojectionen concentrisch sind; in dieselbe Linie fällt für $r_1^2 = r_2^2$ auch der Ähnlichkeitskreis (§ 29), während er für $c = 0$ auf den gemeinsamen Mittelpunkt reduciert ist. Unsere Anschauung führt aber zur Umgestaltung des Nenners durch Einführung der Distanz d an Stelle des Radius R; wegen $2R^2 = r_1^2 + r_2^2 + d^2 - 2c^2$ (§ 12) wird die *Mittelpunktsabscisse*

$$x = \frac{c(r_1^2 - r_2^2)}{4c^2 - d^2}$$

und gewährt eine Bestätigung durch ihren unendlich grossen Werth für $d = 2c$, dem Mittelpunkt der *Parabel* entsprechend, die dann entsteht; wir bemerken auch, dass sie für $d > 2c$ stets negativ und für unendlich grosses d Null wird. Natürlich erhält man für $d = 0$ die Abscisse der Potenzlinie wieder, und für $d^2 = t_i^2$ resp. $d^2 = t_e^2$ die Abscissen der beiden Ähnlichkeitspunkte I und E von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, nämlich resp.

$$c\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{und} \quad c\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}.$$

Nach dem hier entwickelten Zusammenhange erhält man nun immer die *Brennpunkte aus dem Mittelpunkt mittelst des Ähnlichkeitskreises.* Beschreibt man um jenen den Kreis, welcher den Ähnlichkeitskreis orthogonal durchschneidet, so trifft dieser die Centrale in den zugehörigen Brennpunkten und sein Radius ist die *lineare Excentricität* des Kegelschnittes. Es ist die Construction des gemeinsamen Paares von zwei Involutionen, nämlich des zu einem gegebenen Punkte symmetrischen Paares in einer durch ihre Doppelpunkte gegebenen Involution. Liegt der Mittelpunkt aber in der endlichen Strecke zwischen den Ähnlichkeitspunkten, so wird jener Orthogonalkreis rein imaginär und sein reeller Vertreter ist der vom Ähnlichkeitskreis diametral geschnittene Kreis, den man um ihn mit der kleinsten halben Sehne des Ähnlichkeitskreises beschreiben kann; die Schnittpunkte beider sind nun die reellen Brennpunkte des Kegelschnittes. Für die Parabel und den Mittelpunkt im Unendlichen wird der

Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises zu dem im Endlichen gelegenen Brennpunkt; für diesen als Mittelpunkt des Kegelschnittes werden die Endpunkte des zur Centrale normalen Durchmessers des Ähnlichkeitskreises die Brennpunkte des Kegelschnittes, der unter jenen die grösste lineare Excentricität hat und für den das Distanzquadrat

$$d^2 = \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{r_1^2 + r_2^2} - 4c^2$$

ist. Man bestimmt offenbar auch immer *aus einem Brennpunkt den anderen:* als den andern Endpunkt der durch ihn gehenden zur Centrale normalen Sehne im Ähnlichkeitskreis, wenn er in diesem liegt, und als den ihm conjugiert harmonischen in Bezug auf die Ähnlichkeitspunkte, wenn in der Centrale. In jedem Falle ist *das Product der Abstände der Brennpunkte eines Kegelschnittes vom Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises constant, nämlich dem Quadrate seines Radius gleich.* (St. 1852; p. 453.) Neue Hülfsmittel für die Bestimmung der Halbaxenlängen im Anschluss an das Vorige begegnen noch weiterhin.

15. Aber der *Ähnlichkeitskreis* hat zu den im Vorigen erörterten Constructionen noch eine andere Beziehung, welche wieder zu merkwürdigen Resultaten führt. Weil die Ähnlichkeitspunkte I, E zweier Kreise ihre Centraldistanz C_1C_2 innerlich und äusserlich nach dem Verhältniss ihrer Radien $r_1:r_2$ theilen, so sind die von einem Punkte P nach ihnen gehenden Geraden PI, PE die Halbierungslinien für die Winkel derjenigen Geraden PC_1, PC_2, die denselben mit den Mittelpunkten der Kreise verbinden. In Folge dessen sind die Entfernungen des Punktes von diesen PC_1 und PC_2 gleichfalls diesen Radien $r_1:r_2$ proportional; und wenn von dem Punkte aus an beide Kreise reelle Tangenten PT_1, PT_1^* und PT_2, PT_2^* von den resp. Längen t_1 und t_2 gezogen werden können, was immer gleichzeitig stattfindet oder nicht, so ist der Winkel $T_1PT_1^*$ zwischen den Tangenten des einen Kreises dem Winkel $T_2PT_2^*$ zwischen den Tangenten des andern Kreises gleich, weil die bezüglichen rechtwinkligen Dreiecke aus Radien und Tangenten mit ihren Hälften ähnlich sind. Ziehen wir dann (Fig. 6) die Gerade T_1T_2 (oder ebenso $T_1^*T_2$, $T_1T_2^*$, $T_1^*T_2^*$) zwischen den Berührungspunkten von zwei Tangenten beider Kreise, so schneidet dieselbe jeden von ihnen noch in einem Punkte U_1, U_2 resp. und für V_1 als Mitte der Sehne $T_1U_1 = 2s_1$ und V_2 als die Mitte der Sehne $T_2U_2 = 2s_2$,

sowie O als Fusspunkt des von P auf T_1T_2 gefällten Perpendikels und mit Einzeichnung der Radien C_1V_1 und C_2V_2 hat man wegen der Gleichheit der Winkel PT_1O und $T_1C_1V_1$, PT_2O und $T_2C_2V_2$

$$\frac{s_1}{r_1}:\frac{s_2}{r_2}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{r_2}{r_1} \quad \text{oder} \quad s_1=s_2;$$

d. h. *die Sehnen beider Kreise auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte des einen und des andern mit Tangenten aus einem Punkte ihres Ähnlichkeitskreises sind gleich lang.* Und zwar verlaufen bei zweien der vier durch die vorige Construction erhaltenen Sehnen T_1T_2 und $T_1^*T_2^*$ die endlichen Strecken dieser Sehnen T_1U_1 und T_2U_2 in entgegengesetztem Sinn, sodass die Mitte der Strecke T_1T_2 zugleich die Mitte der Strecke U_1U_2 ist; bei den zwei anderen $T_1T_2^*$, $T_1^*T_2$ aber in gleichem Sinne, sodass die Mitte z. B. von $T_1U_2^0$ auch die von $T_2^*U_1^0$ ist. Es ist evident, dass das aus der Mitte M der Centrale beider Kreise zu den bezüglichen Geraden T_1T_2, $T_1T_2^*$ resp. gefällte Perpendikel stets durch diesen Mittelpunkt der Segmente in ihr hindurchgeht und dass in Folge dessen für die Geraden der ersten Art $MT_2=MT_1$ und für die der zweiten Art $MT_2^*=MU_1^0$ ist, sodass die betrachteten Punkte T_1 und T_2, T_1^* und T_2^* etc. in concentrischen Kreisen aus der Mitte der Centrale liegen und somit auch die Perpendikelfusspunkte aus M auf die Geraden T_1T_2, $T_1T_2^*$, $T_1^*T_2$, $T_1^*T_2^*$ als Punkte gleicher Tangentenlängen in der Potenzlinie p der Kreise. Die von einem Punkte P des Ähnlichkeitskreises ausgehenden Tangenten geben vier Gerade $T_1T_2U_1U_2$, $T_1T_2^*U_1^0U_2^0$, $T_1^*T_2U_1^1U_2^1$, $T_1^*T_2^*U_1^*U_2^*$ und es liegen auf Kreisen um M die Punktegruppen T_1, T_2, U_1^1, U_2^0; T_1^*, T_2^*, U_2^1, U_1^0; U_1, U_2; U_1^*, U_2^*. Sowie nun die Tangenten in T_1, T_2; T_1^*, T_2^* durch den angenommenen Punkt P des Ähnlichkeitskreises gehen, so gehen wieder die in U_1^1, U_2^0, U_2^1, U_1^0, sodann die in den Tripeln T_1, U_2, U_2^0; T_2, U_1, U_1^1; T_1^*, U_2^1, U_2^* und T_2^*, U_1^0, U_2^*, endlich die in den Paaren U_1, U_2 und U_1^*, U_2^* je durch einen Punkt des Ähnlichkeitskreises: die Sehnen $T_1U_2^0$, $T_1^*U_1^1$, $T_2U_2^1$, $T_2^*U_2$ sind gleich lang; ebenso T_1U_1, T_2U_2 und wieder $T_1^*U_1^*$, $T_2^*U_2^*$.

Dies liefert die Sätze von den *Wechselsehnen* und *Wechselschnitten* bei St. 1852; p. 455. Denn Wechselsehnen sind die Verbindungslinien der Schnittpunkte des Kreises $\mathfrak{K}_1$ und des Kreises $\mathfrak{K}_2$ mit irgend einem Kreis aus der Mitte der Centrale, Wechselschnitte die Schnittpunkte der zugehörigen Tangenten von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. Der Ort der Wechselschnitte ist

der Ähnlichkeitskreis; *die Wechselsehnen sind gleich lang und umhüllen nach der angegebenen Beziehung zur Potenzlinie und zur Mitte der Centrale eine Parabel, mit der Potenzlinie als Scheiteltangente und der Mitte der Centrale als Brennpunkt* — die gemeinsamen Tangenten der Kreise gehören zu ihnen als von der gleichen Länge Null, die Potenzlinie und die unendlich ferne Gerade als Träger der gemeinsamen Sehnen beider Kreise.

Im Sinne unserer räumlichen Anschauung sind die Punkte $T_1, T_2, U_1^1, U_2^{11}$ der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ die Projectionen der Durchgänge des Kegelschnittes durch die Kehlkreisebenen der sich durchdringenden Hyperboloide; die zugehörigen Tangenten dieser Kreise sind die Projectionen der Paare durch dieselben gehender Mantellinien und die Tafelspuren der ihnen entsprechenden Tangentialebenen. Die Durchschnittslinien dieser Tangentialebenen des einen und des andern Hyperboloids projicieren sich in den Punkten des Ähnlichkeitskreises oder derselbe ist der Ort der scheinbaren Durchschnittspunkte der bezeichneten Mantellinien der Hyperboloide. Man kann dieses weiter ausführen, aber eine andere, nicht minder darstellendgeometrische Richtung der Untersuchung (vergl. § 39) scheint natürlicher auf die Gruppe von Eigenschaften zu führen, von welcher hier ein sehr specieller Fall erschienen ist. Für diese sei auf den 2. Bd. meiner *Darstellende Geometrie* etc. 3. Aufl. §§ 25, 27 verwiesen.

Die Durchdringungen bei festen Hauptkreisprojectionen und veränderlicher Distanz.

16. Schon früher ist vielfach das Interesse hervorgetreten, welches die *Betrachtung aller Durchdringungsprojectionen bei festen Kehlkreisen und veränderlicher Distanz* der Kehlkreisebenen haben müsste, und mit den letzten Entwickelungen sind wir bestimmt auf diese Erörterung gewiesen, da dieselben alle diese Kegelschnitte zu einem *System* verbinden, *welches dieselben Wechselschnitte*, die Punkte des Ähnlichkeitskreises von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, und *dieselben Wechselsehnen hat*, die Tangenten der Parabel in der Schaar derselben Kreise. Dieselben bilden eine Gruppe in der Gesammtheit der Kegelschnitte, welche diese Kreise doppelt berühren, und der Überblick über diese ist die nothwendige Vorbereitung für die Erkentniss

des Gesammtsystems. Wir beginnen mit dem *Falle reeller ausser einander liegender Kehlkreisprojectionen*, der auch bisher meist vorausgesetzt worden ist, ohne dass dies überall nöthig war.

Wir nehmen (Fig. 7) zwei reelle Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ mit den Mittelpunkten C_1, C_2 von der Distanz $2c$ und den Durchmesserendpunkten in der Centrale A_1, B_1 und A_2, B_2 an, welche wir in dieser Ordnung im Sinne der Bewegung von C_1 nach C_2 über $2c$ folgend denken, setzen auch $\mathfrak{K}_1$ als den grösseren der Kreise und als fest in der Tafel voraus, während wir das Hyperboloid von der Kehlkreisprojection $\mathfrak{K}_2$ vom Zusammenfallen auch seiner Kehlkreisebene mit der Tafel aus sich so bewegen lassen, dass die Distanz d nach einander alle positiven Werthe von Null bis Unendlich erhält. Wir wissen, dass die Spuren der Durchdringungsebenen in der Umlegung der Axenebene der Flächen die Tangenten einer Parabel sind, welche die Centrale der Kreise zur Axe und ihre Potenzlinie zur Scheiteltangente, sowie die der Distanz $2c$ entsprechende *Spur der Parabelebene* zur 45° Tangente hat. Die Kreise $\mathfrak{K}_{2d}$ und $\mathfrak{K}_{1d}$ (§ 8) für $d = 2c$ liefern durch ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ die in unserem Falle stets reellen Berührungspunkte P_1, P_1^* und P_2, P_2^* nebst Tangenten der Parabelprojection mit diesen Kreisen: wir kennen ihren Brennpunkt als den Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und erhalten den Scheitel als Fusspunkt des Perpendikels zur Centrale, welches durch den Fusspunkt des Perpendikels vom Brennpunkt auf eine jener Tangenten geht.

Weil nun die Durchdringungsebenen für alle Distanzen zwichen Null und $2c$, als den Parabeltangenten im Übergang von der im Scheitel zur 45° Tangente entsprechend, mit der Tafel Winkel α von mehr als 45° einschliessen, so entspringen aus ihnen *hyperbolische* Durchdringungen mit ebensolchen Projectionen: während alle Werthe der Distanz, welche $2c$ übersteigen, wegen $\alpha < 45°$ *elliptische* Durchdringungen und Projectionen liefern, bis für $d = \infty$ die Durchdringungs-Ebene und Projection der Tafel parallel und zum unendlich grossen *Kreise* um den Mittelpunkt der Centrale werden (§ 14), der aber die Centra C_1, C_2 als die zu ihm symmetrischen und zu den Ähnlichkeitspunkten I, E von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ harmonisch conjugierten zu Brennpunkten hat. (Siehe St. 1852; p. 453.) In der That ergeben sich dieselben unmittelbar aus der stereometrischen Construction in § 13 als die Kegelspitzen durch die Durchdringung, wenn die Scheitel A, B derselben die unendlich fernen Punkte der Meridian-

hyperbeln sind. Und man erhält die Relation: Der Kreis über der Centrale als Durchmesser ist orthogonal zum Ähnlichkeitskreis der Kreise. Ferner ist nach § 13 offenbar, dass unter den *Hyperbeln* des Systems *die beiden Paare der gemeinsamen Tangenten* von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ als *die degenerierten* erscheinen, den Distanzen d gleich

$$t_i = \sqrt{4c^2 - (r_1 + r_2)^2} \quad \text{und} \quad t_e = \sqrt{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

entsprechend, die in I und E resp. normal zur Centrale abgetragen auf dem Meridian des ruhenden Hyperboloides in der Axenebene die beiden Berührungsstellen mit Meridianlagen des bewegten Hyperboloides $\mathfrak{K}_2$ bezeichnen, für welche die gemeinsamen Tangenten die Parabel der Spuren (§ 12) berühren; daraus aber folgt, dass die zwischen denselben liegenden Parabeltangenten jene Meridianhyperbel nicht treffen und als Spuren zu hyperbolischen Durchdringungen Anlass geben, durch welche keine reellen Kegel gehen (§ 5) und deren Projectionen ihre reellen Brennpunkte im Ähnlichkeitskreis haben (§ 14), während die Centrale ihre Nebenaxe ist und ihre Mittelpunkte in der endlichen Strecke zwischen E und I gelegen sind.

Wenn hiernach die Intervalle der Distanzwerthe von Null bis t_i, von t_i bis t_e und von t_e bis $2c$ die Folge der hyperbolischen Durchdringungsprojectionen in *drei Gruppen* sondern, die den durch die Parabel bei $d = 2c$ von ihnen getrennten Ellipsen als einer zweiten Hauptgruppe gegenüberstehen, so entspringt eine Gliederung innerhalb beider Gruppen durch die Berücksichtigung derjenigen *Kegelschnitte* des Systems der Projectionen, *welche den einen oder andern der Kreise* $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *in einem Scheitel vierpunktig berühren* (§ 7), d. h. der Durchdringungskegelschnitte, bei denen die Durchgangspunkte durch eine der Kehlkreisebenen der sich durchdringenden Flächen in einem Endpunkte des in der Axenebene liegenden Kehlkreisdurchmessers vereinigt sind. Sie entsprechen nach § 8 denjenigen Distanzen d, für die zwischen den Kreisen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_{2,d}$ oder zwischen $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_{1,d}$ Berührung stattfindet, sodass die bezüglichen $\mathfrak{K}_{2,d}$ die aus C_2 durch A_1 resp. B_1 und die $\mathfrak{K}_{1,d}$ die aus C_1 durch A_2 resp. B_2 beschriebenen Kreise sind, während die entsprechenden Distanzen die Längen der von A_1 und B_1 an $\mathfrak{K}_2$ und der von A_2 und B_2 an $\mathfrak{K}_1$ gehenden Tangenten a_1, b_1, a_2, b_2 sind. Die

Quadrate dieser Distanzen, nach wachsender Grösse b_1, a_2, b_2, a_1 geordnet, sind daher resp. (Siehe St. 1852, p. 450 f.)

$$(2c - r_1)^2 - r_2^2, \quad (2c - r_2)^2 - r_1^2, \quad (2c + r_2)^2 - r_1^2, \quad (2c + r_1)^2 - r_2^2,$$

wie man diess auch durch Einsetzen von $x = -c \pm r_1$, $x = c \mp r_2$ in die Gleichungen der Sehnen der doppelten Berührung in § 12 bestätigt. Aus der Relation $2c > r_1 + r_2$, die der ausschliessenden Lage der Kreise entspricht, sieht man dann, dass die beiden ersten Quadrate kleiner sind als t_i^2 und die beiden letzten nicht nur grösser als t_e^2 sondern auch grösser als $(2c)^2$. Man sieht daraus, dass von den vier in Rede stehenden Kegelschnitten der Tafel *zwei*, nämlich die in B_1 und A_2 resp. $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ berührenden, zu den *Hyperbeln der ersten Gruppe* (Distanzen 0 bis t_i) und die beiden anderen in B_2 und A_1 an $\mathfrak{K}_2$ resp. $\mathfrak{K}_1$ berührenden zu den *Ellipsen* gehören. Damit erhalten wir folgende Übersicht des ganzen Systems.

17. Die *erste Gruppe der Hyperbeln* $d = 0$ bis $d = t_i$, welche ihre Scheitel und Brennpunkte in der Centrale haben, beginnt, von der doppelt zählenden Potenzlinie der Kreise ausgehend, mit Hyperbeln von sehr stumpfen Asymptotenwinkeln, welche beide Kreise imaginär doppelt berühren; mit der Distanz b_1 tritt mit vierpunktiger Berührung in B_1 an $\mathfrak{K}_1$ die reelle Doppelberührung an $\mathfrak{K}_1$ ein, bei welcher mit wachsender Distanz die Berührungspunkte von B_1 weg aus einander rücken, während die Doppelberührung an $\mathfrak{K}_2$ noch imaginär bleibt bis sie auch da bei der Distanz a_2 mit vierpunktiger Berührung in A_2 reell zu sein beginnt; für die Distanzen zwischen a_2 und t_i haben die Hyperbeln reelle Doppelberührungen mit beiden Kreisen, indem nun auch die Berührungspunkte von A_2 aus auf $\mathfrak{K}_2$ sich von einander entfernen — sie rücken hier wie die auf dem Kreise $\mathfrak{K}_1$ vor bis zu den Berührungspunkten der inneren gemeinsamen Tangenten. Die Mittelpunkte dieser Gruppe liegen in der Strecke vom Fusspunkt der Potenzlinie bis zum inneren Ähnlichkeitspunkt I, ihre linearen Excentricitäten nehmen von der Anfangs- zur End-Lage ab, vom Halbmesser des zum Ähnlichkeitskreis orthogonalen Kreises aus dem Fusspunkt der Potenzlinie bis zu Null für die inneren gemeinsamen Tangenten.

Den Distanzen zwischen t_i und t_e entsprechen die *Hyperbeln mit der*

Nebenaxe in der Centrale: durch die Degenerationsform der inneren gemeinsamen Tangenten hindurch ist die Curve aus den Winkeln der Asymptoten, in denen die Centrale liegt, in die Nebenwinkel derselben übergegangen. Die Berührungen mit beiden Kreisen sind reell doppelt und die Berührungspunkte rücken auf denselben vor von den Berührungsstellen der inneren bis zu denen der äusseren gemeinsamen Tangenten. Der Mittelpunkt bewegt sich vom inneren bis zum äusseren Ähnlichkeitspunkt und die Brennpunkte durchlaufen den Ähnlichkeitskreis, wobei die lineare Excentricität zuerst von Null bis zum Radius dieses Kreises wächst, um dann wieder bis Null in E abzunehmen. Mit dem *Durchgang durch die zweite Degenerationsform* der äusseren gemeinsamen Tangenten bei $d = t_e$ treten die Hyperbeln wieder in die Winkelflächen der Asymptoten, in welchen die Centrale liegt, und ihre Scheitel und Brennpunkte fallen wieder in diese Gerade: Denn die Spur der Durchdringungsebene in der Ebene der Axen schneidet die Meridianhyperbel von $\mathfrak{K}_1$ wieder in reellen Punkten und die Mittelpunkte der durch die Curve gehenden eigentlichen Kegel sind reell. Die doppelte Berührung mit beiden Kreisen bleibt reell und die Berührungspunkte rücken auf denselben von denen der äussern gemeinsamen Tangenten bis zu denen der *Parabel* für $d = 2c$ vor; aber der im Durchgang durch die Degenerationsform t_e stattfindende Wechsel der Lage hat auch bewirkt, dass nun der nämliche Ast jeder Hyperbel beide Kreise reell doppelt berührend umschliesst, wie diess auch die Parabel thut, während in der vorigen Gruppe jeder Ast beide Kreise ausschliessend berührt, sodass von den Punkten derselben reelle Tangenten an die Hyperbeln gehen und in der ersten Gruppe die umschliessenden Doppelberührungen am einen Kreise dem einen Ast und die am andern dem andern Ast der Curve angehören.

Die Mittelpunkte der dritten Gruppe rücken von E aus in dem Sinne der vorigen Bewegung bis in's Unendliche und die linearen Excentricitäten durchlaufen gleichzeitig alle Werthe von Null bis Unendlich.

Die *Hauptgruppe der Ellipsen* sodann lässt sich folgendermassen charakterisieren: Alle Ellipsen umschliessen beide Kreise, sie zuerst beide auch reell doppelt berührend, indem die Berührungspunkte von denen der Parabel aus gegen den Durchmesserendpunkt A_1 resp. B_2 fortrücken; mit $d = b_2$ vereinigen sich die Berührungspunkte am kleinen Kreis in B_2 und von da bis zur Distanz a_1 wird nur der grössere Kreis noch reell,

zuletzt in A_1 vierpunktig, der kleinere aber imaginär doppelt berührt; für noch weiter wachsende Distanz wird auch die Berührung mit $\mathfrak{K}_1$ imaginär, alle folgenden Ellipsen berühren wie der unendlich grosse Kreis aus der Mitte der Centrale — als dem Centrum des concentrischen Kreissystems durch die Berührungspunkte — mit den Brennpunkten C_1, C_2, imaginär doppelt. (Vergl. St. 1852; p. 450—452 (1).)

Die Mittelpunkte dieser Ellipsen rücken auf der Seite des Kreises $\mathfrak{K}_1$ aus dem Unendlichen in der Centrale bis zur Mitte M derselben heran; in der endlichen Strecke von da bis zum Fusspunkt der Potenzlinie liegen nur Mittelpunkte imaginärer doppelt berührender Kegelschnitte; es giebt auch keine reellen Werthe von d, welche ihnen entsprechen, wohl aber zeigt der Werth der Mittelpunktsabscisse in § 14, dass sie für die negativen Werthe von d^2 zwischen ∞ und 0 erhalten werden und wir werden den Sinn davon weiterhin erkennen (§ 18 f.). Die linearen Excentricitäten nehmen ab von der unendlich grossen der Parabel bis zu der des unendlich grossen Kreises, die gleich c ist. Die entsprechenden elementaren Rechnungen sind leicht anzustellen und auch nicht ohne Interesse: Für die vier vierpunktig berührenden Kegelschnitte des Gesammtsystems bilden die reciproken Werthe der Mittelpunktsabscissen die Summe Null; etc.

18. Wir denken nun unter Festhaltung der übrigen Bestimmungen von vorher die reellen Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ durch Bewegung von C_2 gegen C_1 hin einander näher rückend, wodurch die Asymptotenwinkel der ersten Hyperbelgruppe von § 17 zwischen immer engere Grenzen eingeschränkt werden, etc., und verweilen bei dem *Grenzfalle, wo sich jene Kreise ausschliessend berühren* und somit die Punkte B_1 und A_2 zusammenfallen. Die innern gemeinsamen Tangenten sind nun mit der Potenzlinie der Kreise vereinigt, der Spielraum des Asymptotenwinkels für die erste Hyperbelgruppe ist verschwunden: Die Potenzlinie ist die Projection des Durchdringungskegelschnittes für $d = 0$ und den gemeinsamen Mantellinien der Hyperboloide in dieser Berührungslage $d = t_i$ entsprechend; ihre Scheitel und Brennpunkte fallen mit den Mittelpunkten der Kegel des Büschels zusammen; auch die in A_2 an $\mathfrak{K}_2$ und resp. in B_1 an $\mathfrak{K}_1$ vierpunktig

(1) Dazu die Anmerkung, dass sich hier p. 452 der Werke II ein störender Druckfehler eingeschlichen hat, den der Originaldruck nicht enthält; vor Anfang der vierten Zeile sind die Worte ausgefallen »darnach berührt die E^2 nur noch den Kreis A^2 reell doppelt, bis $l = u$ wird, wo sie ihn in U vierpunktig berührt und zum Krümmungskreise hat».

berührenden Kegelschnitte des Büschels sind hier vereinigt. Das System der Durchdringungsprojectionen beginnt mit den Hyperbeln, welche die Centrale zur Nebenaxe haben, deren Brennpunkte den Ähnlichkeitskreis erfüllen und bei denen jeder Ast beide Kreise reell berührt. Ihre linearen Excentricitäten wachsen von Null bis zum Radius des Ähnlichkeitskreises und nehmen wieder bis auf Null ab mit der Grenz- und Degenerationsform der äusseren gemeinsamen Tangenten. Es folgen die Hyperbeln, bei denen der nämliche Ast beide Kreise reell doppelt berührt, bis mit $d = 2c = r_1 + r_2$ die Parabel; sodann für weiter wachsende d die Reihe der Ellipsen, in welcher für $4r_2(r_1 + r_2)$ und $4r_1(r_1 + r_2)$ als Werthe des Distanzquadrates die bei B_2 mit $\mathfrak{K}_2$ und resp. die bei A_1 mit $\mathfrak{K}_1$ sich vierpunktig berührenden hervortreten; etc.

Rückt nun der Mittelpunkt C_2 noch weiter gegen C_1 hin, so *schneiden einander die Kreise* $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in zwei reellen Punkten (Fig. 8), deren Verbindungslinie die Potenzlinie ist, während der innere Ähnlichkeitspunkt I nun gegen den Mittelpunkt des grösseren Kreises hin über sie hinübergerückt ist und die Längen der inneren gemeinsamen Tangenten imaginär oder ihre Quadrate negativ geworden sind; eben dies führt zu neuen Ergebnissen gemäss der früher (§ 1) begründeten Bedeutung dieses Überganges. Wir überblicken zuerst die Durchdringungsprojectionen für die *reellen* Distanzen der Kehlkreisebenen.

Dieselben gehen aus von dem ausserhalb der Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gelegenen Theil ihrer Potenzlinie, welcher die Projection der Durchdringungshyperbel der Hyperboloide bei vereinigten Kehlkreisebenen ist und die constante Differenz der Tangentenlängen Null hat. Mit von Null aus reell wachsenden Distanzen bis zu $d = t_e$ erhält man Hyperbeln der zweiten Gruppe, von denen jeder Ast beide Kreise reell berührt und die ihre Brennpunkte in dem ausserhalb beider Kreise gelegenen Theil ihres Ähnlichkeitskreises, ihre Mittelpunkte in der Strecke vom Fusspunkt der Potenzlinie in der Centrale bis zum äusseren Ähnlichkeitspunkt haben. Ihnen folgt für $d = t_e$ das Paar der gemeinsamen Tangenten, dann die Hyperbeln, welche mit einem Aste beide Kreise reell doppelt berühren, begrenzt durch die Parabel des Systems, endlich die Ellipsen mit den bei B_2 an $\mathfrak{K}_2$ und resp. bei A_1 an $\mathfrak{K}_1$ vierpunktig berührenden wie vorher. Der Mittelpunkt hat die unendliche Strecke vom Fusspunkt der Potenzlinie bis zur Mitte der Centrale durchlaufen; aber die Strecke von jenem bis

zum innern Ähnlichkeitspunkt ist nicht von Mittelpunkten von Durchdringungsprojectionen für reelle Distanzen erfüllt, und der im Innern der Grundkreise liegende Bogen des Ähnlichkeitskreises enthält keine Brennpunkte von solchen; während doch Kreise aus der Mitte der Centrale, deren Radien den Werth $(r_1 - c)$ übertreffen, ohne den Werth

$$\sqrt{\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) - c^2}$$

zu erreichen, mit welchem ein solcher Kreis durch die Schnittpunkte der Grundkreise geht, beide Kreise in Punkten schneiden, welche Berührungspunkte mit Kegelschnitten des Systems sein sollten, und durch zu den von der planimetrischen Anschauung geforderten Ellipsen innerhalb der von beiden Kreisen umschlossenen Linsenfläche gehören könnten, ohne doch im Sinne unserer stereometrischen Anschauung als Durchdringungsbilder von Hyperboloiden mit reeller Distanz der Kehlkreisebenen erhalten werden zu können. Aber eben dadurch, dass sie nur aus nicht reellen Distanzen zwischen o und t_1 entspringen können, liefert unsere Grundanschauung sofort ihre reelle Construction. Denn wir wissen aus der einleitenden Übersicht von der Methode der Cyklographie, dass mit dem Übergang von reellen zu imaginären Distanzen von der Tafel — d wie z — durch den Wechsel des Vorzeichens der Quadrate und Producte von z und d die einfachen Hyperboloide in reelle Kugeln übergehen, deren Punkte dargestellt sind durch Kreise, die von einem reellen festen Kreis, dem Hauptkreis der Kugel, im Durchmesser geschnitten werden, sobald jener in der Tafel liegt, oder für deren Projectionen die kürzeste durch sie gehende Halbsehne in diesem Kreis die Höhe des Originals über der Ebene desselben angiebt. Desshalb muss für alle Punkte der Projection eines ebenen Querschnittes der Kugel das Verhältniss der durch sie gehenden kürzesten Halbsehnen der Hauptkreisprojection zu ihrem Abstand von der Projection der bezüglichen Spur der Ebene constant, nämlich der trigonometrischen Tangente des Winkels der Ebene zur Tafel gleich sein. (Vergl. § 7.) Und in Folge dessen gilt auch für die Punkte der Projection der Durchdringung von zwei solchen Kugeln das Gesetz, *dass die Summe oder Differenz der zugehörigen kürzesten Halbsehnen der entsprechenden Hauptkreisprojectionen constant, nämlich der Distanz der Hauptkreisebenen gleich ist; sowie sie auch zum Abstand der Spuren der Durchdring-*

ungsebene in der Projection d. h. der Sehnen der doppelten Berührung der Durchdringungsprojection mit den Hauptkreisen in demselben constanten Verhältniss $\operatorname{tg}\alpha$ *steht.*

19. In der That ist für $-z^2$ als das Quadrat der halben kleinsten Sehne durch den Punkt (x, y) innerhalb des Kreises vom Radius r um den Mittelpunkt (α, β)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = -z^2;$$

die Definition der Potenz umfasst diesen sowie den vorher betrachteten Fall oder geht für einen inneren Punkt naturgemäss in die jetzige Fassung über. Und für die Projection und Durchdringung der Kugeln (wofür nun d und z reell sind)

$$(x+c)^2 + y^2 + z^2 - r_1^2 = 0, \qquad (x-c)^2 + y^2 + (z+d)^2 - r_2^2 = 0$$

erhält man natürlich durch Elimination von z zwischen beiden Gleichungen ein Resultat, welches auch aus dem entsprechenden in § 11 durch Verwandlung von d^2 in $-d^2$ sich ergiebt; dasselbe spricht die Constanz jener Summe oder Differenz der halben kleinsten Sehnen aus und wir haben wieder wie früher die *Summe* für alle Punkte *innerhalb* der durch die Hauptebenen begrenzten *Schicht*, die *Differenz* für alle Punkte *ausserhalb* derselben zu nehmen. Die Symbolik und die damit begründeten Sätze des § 11 bleiben in Gültigkeit. Auch ergiebt sich für die Ebene der Durchdringung

$$2cx - dz = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 + d^2)$$

oder mit Verlegung des Anfangspunktes in die Potenzlinie

$$2cx - dz = \frac{1}{2}d^2$$

(vergl. § 12), was sofort als die Enveloppe ihrer Spur in der Axenebene die zur Potenzlinie symmetrische von der *Parabel der Spuren* für reelle Distanzen erkennen lässt. Damit erhalten wir die anschauliche Entwickelung für diesen Theil unseres Kegelschnittsystems. Für die rein imaginären Werthe zwischen $d = 0$ und $d = t_i$ oder

$$d = \sqrt{4c^2 - (r_1 + r_2)^2} = i\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}$$

liefern bei reell aufgetragenen d die Kugeln mit dieser Distanz der Hauptebenen und den gegebenen Kreisen als Hauptkreisprojectionen kreisförmige Durchdringungen, deren Projectionen *Ellipsen* sind, *welche von jenen Kreisen umschliessend reell oder imaginär doppelt berührt werden.* Wir erhalten ihre in der Centrale liegenden Scheitel als die Fusspunkte der Perpendikel zu dieser, welche von den Durchschnittspunkten des Kreises $\mathfrak{K}_1$ mit demjenigen Kreise vom Radius r_2 ausgehen, der seinen Mittelpunkt (C_2) in dem in C_2 errichteten Perpendikel zur Centrale im reellen Abstand id hat; es sind die Scheitel der Nebenaxe. Nach der Methode der darstellenden Geometrie erhält man aber auch sofort die Scheitel der Hauptaxe: Die gemeinsame Sehne jener beiden Kreise giebt als das Perpendikel von ihrer Mitte zur Centrale die Linie und zugleich durch ihre Länge die Grösse derselben. Endlich erhält man für die Bestimmung der Berührungspunkte der Ellipse mit den Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ aus dem Umstande, dass sie die Projectionen der Durchgangspunkte der Durchdringung durch die Hauptkreisebenen der betreffenden Kugeln sind, die einfache Regel: Man beschreibt aus C_1 resp. C_2 diejenigen Kreise $\mathfrak{K}_{1d}$, $\mathfrak{K}_{2d}$, welche die halben Sehnen von $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ mit dem Centralabstand d zu Halbmessern haben; ihre Potenzlinien mit $\mathfrak{K}_2$ resp. $\mathfrak{K}_1$ sind die *Sehnen der Doppelberührung* mit diesen Kreisen und ihre *Pole* in denselben die Schnittpunkte der zugehörigen gemeinsamen Tangenten. Weil die Kreise $\mathfrak{K}_{1d}$ und $\mathfrak{K}_{2d}$ die resp. Radienquadrate $(r_1^2 - d^2)$ und $(r_2^2 - d^2)$ haben, so erkennt man wie in § 12, dass die Büschel $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ und $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ den Kreis aus der Mitte M der Centrale mit dem Radiusquadrat $\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2) - c^2$ gemein haben oder dass auch jetzt die vier Berührungspunkte mit $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ immer auf einerlei Kreis um M gelegen sind, sodass durch einen der Berührungspunkte das Tripel der übrigen und die Distanz der Hauptkreisebenen bestimmt ist. In Folge dessen schneiden sich ferner die Kreise derselben Büschel, die durch den Mittelpunkt des zugehörigen Grundkreises und den Pol seiner Berührung gehen, wie in §§ 13, 14 auf dem *Ähnlichkeitskreis* und die dort entwickelte Theorie der *Brennpunkte* und die der *Wechselsehnen* und *Wechselschnitte* bleibt in unveränderter Gültigkeit. Dieselbe konnte sich desshalb auch nicht in Abhängigkeit von den geraden Mantellinien der einfachen Hyperboloide ergeben.

20. Wir können nun die Übersicht des Systems für den vorgelegten

Fall beendigen. Der Distanz Null als Grenze der rein imaginären Distanzwerthe entspricht *der doppelt gezählte im Innern beider Kreise gelegene Theil ihrer Potenzlinie* als Ort der Punkte gleicher kürzester Sehnen in beiden Kreisen, *eine Ellipse,* welche beide Kreise in ihren Schnittpunkten mit einander berührt — wie denn für $\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) - c^2$ als das Radiusquadrat des Kreises aus der Mitte der Centrale das Distanzquadrat verschwindet.

Wächst nun der absolute Werth der Distanz von Null aus, so nimmt der Radius des Kreises um M durch die Berührungspunkte ab und die Berührungspunkte rücken, sich trennend, auf beiden Kreisen gegen die inneren Durchmesserendpunkte B_1 und A_2 hin; die entsprechenden Ellipsen berühren beide Kreise reell doppelt, sodass ihre Umfänge durch die Berührungsstellen in *vier Theile* zerlegt werden, von denen zwei die constante der Distanz gleiche *Summe* und die beiden andern durch jene von einander getrennten die constante derselben Distanz gleiche *Differenz der zugehörigen kleinsten Halbsehnen beider Kreise* zeigen — jene die Projectionen der in der Schicht der Hauptkreisebenen gelegenen Bögen des Durchdringungskreises, diese die Projectionen seiner Bögen ausserhalb derselben Schicht; in den Berührungspunkten selbst sind daher die kleinsten Halbsehnen des jeweilen nicht berührten Kreises einander gleich, weil sie jener Distanz gleich sind.

Dem Werthe der Distanz $d = \sqrt{r_2^2 - (2c - r_1)^2}$ (vergl. § 16), d. h. dem Centralabstand derjenigen Sehnen des Kreises $\mathfrak{K}_2$, deren Hälften dem Radius des aus C_2 durch B_1 beschriebenen, also $\mathfrak{K}_1$ ausschliessend berührenden Kreises gleich sind, entspricht die Vereinigung der beiden Berührungsstellen der Durchdringungsprojection an $\mathfrak{K}_1$ in B_1, bei noch getrennter reell doppelter Berührung an $\mathfrak{K}_2$; der eine der elliptischen Bögen mit constanter Differenz ist verschwunden und man behält zwei durch die Stellen dieser Berührung getrennte Theile des Umfangs, in deren einem der vierpunktigen Berührung B_1 nicht benachbartem die Constanz der Summe besteht, während im grösseren andern die Differenz denselben Werth hat, etc.

Bei weiterem Wachsen von d wird die Berührung an $\mathfrak{K}_1$ imaginär doppelt und mit $d = \sqrt{r_1^2 - (2c - r_2)^2}$ vereinigen sich auch die Stellen der Berührung an $\mathfrak{K}_2$ zu einer vierpunktigen Berührung in A_2, sodass für

noch grössere Distanzen die Berührungen der Ellipse mit beiden Kreisen imaginär doppelt sind und dieselbe ganz in das Innere der Linsenfläche zwischen ihnen zurücktritt, während für alle Punkte des Umfangs constante Summe der kleinsten Halbsehnen beider Kreise besteht.

Die Ellipse wird dabei immer kleiner und für $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}$ als den reellen Factor von t_i hat sich dieselbe in den inneren Ähnlichkeitspunkt zusammengezogen; derselbe ist die Projection des Berührungspunktes der Kugeln in der durch diese Distanz bestimmten Lage und da diese Distanz die grösste ist, für welche unsere Durchdringung noch reell wird, so zeichnet den *inneren Ähnlichkeitspunkt sich schneidender reeller Kreise* unter allen Punkten die Eigenschaft aus, *dass die Summe der durch ihn gehenden kleinsten Halbsehnen der Kreise den grössten möglichen Werth besitzt.* (St. 1852; p. 458.)

Es ist evident, dass die Mittelpunkte dieser Ellipsen vom Fusspunkt der Potenzlinie in der Centrale bis zum inneren Ähnlichkeitspunkt hin liegen und dass ihre *Brennpunkte den im Innern beider Kreise liegenden Theil ihres Ähnlichkeitskreises* erfüllen, sowie dass gleichzeitig die lineare Excentricität von dem Werthe der halben Sehne in der Potenzlinie bis zur Null stetig abnimmt. Endlich ist die von den *Wechselsehnen* umhüllte *Parabel* durch die Potenzlinie als Scheiteltangente und die Mitte der Centrale als Brennpunkt wie sonst bestimmt, da die Realität der gemeinsamen Tangenten dabei keine Rolle spielt; die Wechselschnitte auch für diese Ellipsen sind im Ähnlichkeitskreis.

21. Wenn wir den kleineren Kreis $\mathfrak{K}_2$ tiefer in den grösseren hineinrücken lassen, so wächst der Winkel der äusseren gemeinsamen Tangenten stetig und in der *Grenzlage der umschliessenden Berührung* fallen sie mit einander und mit der Potenzlinie zusammen, der Berührungspunkt ist B_1, B_2 und E und der Ähnlichkeitskreis berührt beide Kreise in ihm. Die reellen Werthe der Distanz beginnen nun mit $t_e = 0$, während die beiden Regionen von 0 bis t_i und von t_i bis t_e dem imaginären Werthbereich angehören und statt umschliessender Hyperbeln *umschlossene Ellipsen* liefern. Den reellen Distanzen zwischen 0 und $2c$ entsprechen *Hyperbeln*, welche mit dem einen Aste beide Kreise doppelt berühren, den grösseren reell und den kleineren imaginär; für $d = 2c$ folgt die *Parabel*, die sich ebenso verhält. Die zugehörigen Mittelpunkte erfüllen den äusseren unendlichen Theil der Centrale vom Berührungspunkt der Kreise aus, dem

Mittelpunkt, Scheitel und Brennpunkt der Projection der gemeinsamen Mantellinien der Hyperboloide für $d = 0$; ihre Brennpunkte vertheilen sich auf die unbegrenzte Strecke der Centrale auf der gleichen Seite bis zum Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises hin, die linearen Excentricitäten wachsen von Null bis Unendlich. Nach der Parabel, für alle $d > 2c$ folgen die *umschliessenden Ellipsen*, welche den Kreis $\mathfrak{K}_1$ zuerst unter Vorrücken der Berührungspunkte von denen der Parabel gegen A_1 hin reell doppelt berühren, bis sich die Berührungsstellen für $d = \sqrt{(c + r_1)^2 - r_2^2}$ in A_1 zur vierpunktigen Berührung vereinigen, sodass von da an nur noch imaginäre Berührungen statthaben. Die Mittelpunkte rücken auf der der Potenzlinie entgegengesetzten Seite vom Unendlichen bis zur Mitte der Centrale heran, indess die Brennpunkte den vom Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises nach der Seite von C_1 hin liegenden unbegrenzten Theil der Centrale erfüllen.

Alle übrigen Kegelschnitte, deren Brennpunkte dem Ähnlichkeitskreis angehören, entstehen aus Durchdringungen von *Kugeln*, weil mit *imaginären Distanzen*. Sie beginnen mit dem der Distanz $d = 0$ als Grenze der rein imaginären Werthe entsprechenden *Berührungspunkte* der Kreise und der Kugeln als unendlich kleiner *Ellipse;* daher der Differenz Null der kleinsten Halbsehnen — während für alle übrigen Punkte der Potenzlinie die Differenz der Tangentenlängen gleich Null ist. Mit der Verschiebung der Kugel $\mathfrak{K}_2$ unter Festhaltung ihrer Hauptkreisprojection entstehen reelle Durchdringungskreise bis $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}$ oder $2\sqrt{r_1 r_2}$, bei welcher ausschliessende Berührung zwischen beiden Kugeln stattfindet; sie liefern reelle Ellipsen, die den grösseren Kreis stets imaginär, den kleineren zum Theil reell berühren, indem die reell doppelten Berührungen an diesem durch eine vierpunktige Berührung in A_2 beschlossen werden. Schliesslich zieht sich die Ellipse auf den inneren Ähnlichkeitspunkt als die Projection jenes Berührungspunktes der Kugeln zusammen, für den damit die Summe der durch ihn gehenden kleinsten Halbsehnen den Maximalwerth $2\sqrt{r_1 r_2}$ erreicht. Die Potenzlinie unter jenen und der Berührungspunkt unter diesen Durchdringungen berühren allein beide Kreise reell, und sie sind zugleich vierpunktig berührende Kegelschnitte resp. unter denen aus reellen und denen aus rein imaginären Distanzen.

22. Wir kommen endlich zu dem Falle, in welchem der *Kreis* $\mathfrak{K}_2$ *ohne Berührung vom Kreise* $\mathfrak{K}_1$ *umschlossen* wird, in welchem also beide Ähn-

lichkeitspunkte und der ganze Ähnlichkeitskreis im Innern von $\mathfrak{K}_2$ liegen (Fig. 9). Die Kegelschnitte aus den Durchdringungen der Hyperboloide beginnen in diesem Falle mit *Hyperbeln* der dritten Gruppe, bei denen derselbe Ast beide Kreise umschliesst und $\mathfrak{K}_1$ reell doppelt berühren kann. Sie entfalten sich aus der Potenzlinie $d = 0$ und berühren zuerst wie diese nicht reell, für $d = 2c$ folgt die *Parabel* mit derselben allgemeinen Lage, endlich die *umschliessenden Ellipsen* wie früher.

Ob die *Parabel* den Kreis $\mathfrak{K}_1$ *schon reell doppelt*, ob sie ihn *im Scheitel vierpunktig* oder ob sie ihn *nicht reell berührt*, ist davon abhängig, ob die Länge der vom Durchmesserende B_1 von $\mathfrak{K}_1$ auf der Seite der Potenzlinie an $\mathfrak{K}_2$ gezogenen Tangente, die Distanz für die bezeichnete vierpunktige Berührung, $\lesseqgtr 2c$ ist; im ersten Falle berühren die Parabel und eine Reihe vorausgehender Hyperbeln von der jener Distanz entsprechenden ab reell doppelt, die der Parabel folgenden Ellipsen bis zu der in A_1 vierpunktig berührenden bei der Distanz a_1 thun dasselbe, und erst von da ab sind alle Berührungen imaginär; ist $b_1 = 2c$, so beginnen die reellen Berührungen mit der vierpunktigen der Parabel und dauern in der Reihe der Ellipsen bis zur vorerwähnten Grenze; endlich für $b_1 > 2c$ berührt auch die Parabel noch nicht reell, es folgen ihr imaginär doppelt berührende Ellipsen bis zu der in B_1 vierpunktig berührenden, etc. — *sodass in diesem Falle das System der Ellipsen aus den Durchdringungen für reelle Distanzen im Anfang und wieder am Ende durchaus imaginär berührende enthält,* die sich jedoch in einem wichtigen Punkte von einander unterscheiden. Sowie für die nicht reell berührenden Hyperbeln im Anfange der Durchdringungen aus reellen Distanzen nach ihrer Lage ausserhalb der Scheitel der Hauptkreisebenen ringsum *constante Differenz der Tangentenlängen* besteht, so auch noch *für die erste Gruppe der Ellipsen in diesem letzteren Falle,* weil erst mit der vierpunktigen Berührung die Durchdringung an die eine Grenzebene der Schicht *heran* und mit der reellen Doppelberührung in sie *hinein* tritt; nach jener findet also für den Theil des Umfangs zwischen den Punkten der Doppelberührung auf der Seite von B_1 constante Summe der Tangentenlängen statt, und bei weiter wachsender Distanz wächst dieser Theil des Umfangs, bis er mit der vierpunktigen Berührung in A_1 zum ganzen Umfange geworden ist — d. h. *für die nicht reell berührenden Ellipsen am Ende des Systems der Durchdringungen für reelle Distanzen findet ringsum constante Summe der*

Tangentenlängen statt, sie selbst liegen ganz innerhalb der Schicht. (St. 1852; p. 460.)[1]

Für die *Durchdringungen mit imaginären Distanzen* ist die Potenzlinie eine imaginäre Ellipse und die Spur der Durchdringungsebene in der Axenebene oder die Tangente der Parabel von § 19 trifft von ihr ausgehend zuerst $\mathfrak{K}_1$ nicht reell; erst mit $d = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - 4c^2}$ beginnen die reellen Durchdringungen und sie endigen mit $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}$, für jenen Werth wird die Kugel $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{K}_1$ *umschliessend* und für diesen *ausschliessend berührt;* die erste Berührung ist im äusseren E, die zweite im inneren Ähnlichkeitspunkt I projiciert, in natürlicher Umkehrung der Ordnung gegenüber den Distanzwerthen in Folge des Zeichenwechsels ihrer Quadrate. Jener entspricht dem kleinsten Werthe der Distanz unter den reellen Durchdringungen aus Kugeln und dieser dem grössten; und da der erste sich ausserhalb, der zweite innerhalb der bezüglichen Schicht befindet, so erhält man für den letzteren wie es sein muss den Satz von § 20 wieder, für den ersteren aber den ergänzenden Satz: *Für den äusseren Ähnlichkeitspunkt von zwei Kreisen, von denen der eine den andern umschliesst, ist die Differenz der zugehörigen halben kleinsten Sehnen ein Minimum.* Man erhält auf den Perpendikeln zur Centrale in den Ähnlichkeitspunkten I und E sofort jenes Maximum wie dieses Minimum. (St. 1852; p. 459.)

Die zwischen jenen Grenzwerthen liegenden Distanzen liefern reelle *Ellipsen* als Durchdringungsprojectionen der Kugeln, welche zuerst auch den inneren Kreis imaginär, dann im Scheitel vierpunktig bei B_2, später reell doppelt berühren, um weiterhin durch die vierpunktige Berührung wieder zur imaginären zurück zu kommen; die zur Centrale normalen Halbsehnen von $\mathfrak{K}_1$, welche $\mathfrak{K}_2$ bei B_2 und resp. A_2 berühren, liefern die Distanzen der Hauptkreisebenen, welchen jene vierpunktigen Berührungen entspringen. Die Mittelpunkte aller dieser reellen Ellipsen erfüllen die Centrale zwischen den Ähnlichkeitspunkten und ihre Brennpunkte den Ähnlichkeitskreis. Die Potenzlinie als Scheiteltangente und die Mitte der Centrale als Brennpunkt bestimmen die von den Wechselsehnen umhüllte Parabel.

---

(1) Die Ausgabe der Werke hat hier p. 460 Zeile 16 v. o. den störenden Druckfehler $u_1 < AB$, wofür also stehen muss und im ersten Druck wirklich steht $u_1 > AB$.

23. Es bleibt übrig nach den verschiedenen Fällen der reellen Hauptkreise die *Fälle* zu besprechen *wo einer der Hauptkreise rein imaginär ist oder wo beide es sind;* die Fälle von verschwindendem Radius bei einem der Kreise oder bei beiden mögen dann als Specialfälle einer besondern Erörterung unterworfen werden.

Zunächst denken wir den Kreis $\mathfrak{K}_1$ *rein imaginär* oder von negativem Radiusquadrat $-r_1^2$ und durch seinen Symmetriekreis $\mathfrak{K}_1$ (Fig. 10) vertreten, den anderen $\mathfrak{K}_2$ *reell;* jenem als in der Tafel gelegen entspricht ein festes gleichseitiges zweifaches Rotationshyperboloid mit der Tafel als Hauptebene und den Scheitelabständen r_1 von der Tafel, diesem ein einfaches, welches wir in der Art bewegt vorstellen, dass die Projection $\mathfrak{K}_2$ seines Kehlkreises unverändert bleibt und nur die Distanz der Ebene desselben von der Tafel wechselt. Ist d diese Distanz, so erhalten wir den in der Tafel gelegenen Parallelkreis $\mathfrak{K}_{2d}$ des einfachen Hyperboloides aus seinem Radiusquadrat $(r_2^2 + d^2)$; wir erhalten dagegen die Projection für den in der Kehlkreisebene des einfachen Hyperboloids liegenden Parallelkreis des zweifachen mit dem Radiusquadrat $(-r_1^2 + d^2)$, rein imaginär so lange der reelle Factor von r_1 grösser ist als d, als Punkt C_1 für d als demselben gleich, und reell für grössere Distanzen; im ersten Falle trägt man d in C_1 rechtwinklig zur Centrale auf, geht durch den erhaltenen Punkt parallel zu ihr bis zum Kreis $\mathfrak{K}_{1s}$ und erhält in dieser Strecke, der zur Distanz d als Centrum gehörigen Halbsehne in diesem Kreise, den Radius für den Symmetriekreis des bezüglichen imaginären Parallelkreisbildes; andernfalls zieht man von dem Endpunkt der so abgetragenen Distanz die Tangente an $\mathfrak{K}_{1s}$ und hat in ihrer Länge den Radius des reellen Parallelkreises in dieser Distanz vom Hauptschnitt — die Darstellung der Meridianhyperbel aus dem Kreisbüschel mit reellen Grenzpunkten. (§ 1.) Die Potenzlinien der so erhaltenen Kreise $\mathfrak{K}_{2d}$ und $\mathfrak{K}_{1d}$ mit $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$, die natürlich mit Rücksicht auf das Vorzeichen der Radienquadrate aus $4cx = r_1^2 - r_2^2$ (§ 12) zu construieren sind, liefern die Spuren der Ebene der Durchdringung auf den Hauptschnittebenen in dieser Lage; die durch die resp. Kreise auf ihnen bestimmten Involutionen harmonischer Pole gehören dem entstehenden Kegelschnitt an.

Die *Ebene der Durchdringung* aus

$$(x + c)^2 + y^2 - z^2 = -r_1^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 - (z + d)^2 = r_2^2$$

ist

$$2cx + dz = -\frac{1}{2}(d^2 + r_1^2 + r_2^2)$$

und wird durch Verlegung des Anfangspunktes in die Potenzlinie

$$4cx = -(r_1^2 + r_2^2) \quad \text{mit} \quad 2cx + dz = -\frac{1}{2}d^2$$

berechnet, wie in § 12; ihre Spur in der Axenebene der Flächen umhüllt dieselbe *Parabel* wie dort. Die Projection des Durchdringungskegelschnittes wird aus der früheren (§ 11) durch Wechsel des Zeichens von r_1^2 erhalten, mit $d = 2c$ die Parabel des Systems, der die 45° Ebene $x + z = -c$ entspricht. Der allgemeine Werth der *Mittelpunkts-Abscisse* ist (§ 14)

$$-c\frac{r_1^2 + r_2^2}{4c^2 - d^2};$$

sie wird nur für reelle $d > 2c$ positiv.

Der Brennpunkt der Systemsparabel ist der Mittelpunkt des *Ähnlichkeitskreises* von der Abscisse (§ 14)

$$c\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}.$$

während sein Radius mit den beiden Ähnlichkeitspunkten zugleich imaginär oder sein Quadrat negativ (§ 14) geworden ist. Die gemeinsamen Tangenten und auch die Quadrate ihrer Längen t_i, t_e sind imaginär geworden (§ 11); die bezüglichen Durchdringungen werden aus einer rein imaginären Kugel mit einer veränderlichen reellen Kugel nach dem Vorgange von § 19 bestimmt und ihre Projectionen sind *imaginäre Kegelschnitte*, wenn schon die Ebenen von jenen und ihre Spuren in der Axenebene, sowie die Mittelpunkte und Brennpunktspaare von diesen reell bleiben nach den Gleichungen

$$2cx - dz = \frac{1}{2}(d^2 - r_1^2 - r_2^2), \qquad x = -c\frac{r_1^2 + r_2^2}{4c^2 + d^2}.$$

Und da die Brennpunkts-Involution elliptisch ist, so hat sie mit der durch den Mittelpunkt bestimmten symmetrischen Involution stets ein reelles Paar

gemein, oder alle Kegelschnitte des Systems haben ihre reellen *Brennpunkte in der Centrale*, wie es sein muss, weil der Ähnlichkeitskreis rein imaginär ist.

24. Die Übersicht unseres Kegelschnittsystems gestaltet sich also wie folgt: Es beginnt für $d = 0$ mit der *Potenzlinie* der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ als dem Ort der Centra von Kreisen, welche $\mathfrak{K}_1$ diametral und $\mathfrak{K}_2$ orthogonal schneiden (§ 3), der Projection der zur Tafel symmetrischen gleichseitigen Hyperbel, deren Brennpunkte mit den zugehörigen Kegelmittelpunkten vereinigt in diejenigen Punkte der Centrale fallen, wo sie von dem aus dem Fusspunkte der Potenzlinie beschriebenen unter jenen Kreisen geschnitten wird. Bis $d = 2c$ folgen *Hyperbeln* von bis Null abnehmenden Asymptotenwinkeln, die anfänglich den reellen Kreis umschliessend imaginär berühren, bis mit einer vierpunktigen Berührung im Scheitel bei A_2 mit $d = a_2 = \sqrt{(2c - r_2)^2 + r_1^2}$ (§ 16) die reelle Doppelberührung beginnt, bei welcher die Berührungspunkte von A_2 aus auf $\mathfrak{K}_2$ bis zu den Berührungspunkten der *Parabel* vorrücken. Ihre Mittelpunkte rücken von der Potenzlinie aus auf der Seite des nicht reellen Kreises bis in's Unendliche für jene Parabel. Mit den für $d > 2c$ entspringenden *Ellipsen* rücken sie aus dem Unendlichen auf der Seite des reellen Kreises wieder herein, während die zugehörigen Berührungspunkte auf $\mathfrak{K}_2$ näher und näher gegen B_2 zusammen rücken, um sich mit der Durchdringung für die Distanz $d = b_2 = \sqrt{(2c + r_2)^2 + r_1^2}$ dort zur vierpunktigen Berührung zu vereinigen. Die Distanzen für die vierpunktigen Berührungen werden construiert als Radien der Kreise aus A_2 resp. B_2, welche den Kreis $\mathfrak{K}_1$, diametral schneiden — in consequenter Anwendung des Satzes (§ 1), wornach der orthogonale Schnitt mit einem rein imaginären Kreis durch den diametralen Schnitt mit seinem Symmetriekreis vertreten wird. Mit dem unendlich grossen Kreis um die Mitte der Centrale d. h. von der Mittelpunktsabscisse Null und den Brennpunkten in C_1 und C_2 (§ 16) endet das System. Reelle Kegelschnitte aus nicht reellen Distanzen erscheinen nicht.

Das zugehörige System der *Wechselschnitte* ist nicht reell; die Enveloppe der *Wechselsehnen* aber nach wie vor die Parabel, welche die Potenzlinie zur Scheiteltangente und die Mitte der Centrale zum Brennpunkt hat. Die Tangenten dieser Parabel schneiden den reellen Kreis in nicht reellen Sehnen, welche mit denen des imaginären Kreises in ihnen

gleiche Länge haben oder für welche die bezüglichen beiden Polinvolutionen elliptisch und von einerlei Potenz sind, aber von verschiedenen Mittelpunkten, letzteres mit einziger Ausnahme der Potenzlinie und der unendlich fernen Geraden; aber auch die zu ihnen gehörigen Punkte des Systems der Wechselschnitte sind imaginär.

Lagenunterschiede des reellen und des rein imaginären Kreises von ähnlicher Art wie bei den reellen Kreisen sind nicht hervorzuheben, weil eine Berührung zwischen ihnen unmöglich ist und von einem Ausschliessen und Einschliessen des einen durch den andern auch nicht die Rede sein kann, vielmehr von einem gegenseitigen Einschliessen gesprochen werden sollte, wenn mit solchem Ausdruck irgend eine Verwendung verbunden wäre.

25. So kommen wir zu dem wieder sehr lehrreichen *Falle von zwei rein imaginären Kreisen* oder zwei zweifachen Hyperboloiden, deren eines wir mit dem Hauptkreis $\mathfrak{K}_1$ in der Tafel als fest und das andere durch alle Distanzen d so bewegt denken, dass die Projection seines Hauptkreises $\mathfrak{K}_2$ ebenfalls fest bleibt; wir setzen beide Kreise durch ihre Symmetriekreise (Fig. 11) $\mathfrak{K}_{1s}$ und $\mathfrak{K}_{2s}$ resp. vertreten voraus. Dann ist die Potenzlinie der Hauptkreise die in Bezug auf die Mitte der Centrale zur Potenzlinie der Symmetriekreise symmetrische Gerade. Man bestimmt ferner für irgend eine Distanz d sowohl den Parallelkreis des verschobenen Hyperboloids in der Tafel wie den Parallelkreis des ruhenden in der Hauptebene des verschobenen nach dem für den letzteren in § 23 beschriebenen Verfahren und erhält die Potenzlinien der bezüglichen beiden Kreispaare durch Construction ihres Abstandes von der Mitte der Centrale mit Rücksicht darauf, ob die Radien beide rein imaginär sind oder der eine derselben reell geworden ist. Die *Ebene der Durchdringung* ist ausgedrückt durch

$$2cx + dz = -\frac{1}{2}(d^2 + r_1^2 - r_2^2) \quad \text{resp.} \quad 2cx + dz = -\frac{1}{2}d^2,$$

liefert also die Parabel des § 12. Die Berührungen sind sämmtlich imaginär doppelt als Schnitte reeller Geraden mit rein imaginären Kreisen. Die *Mittelpunkts-Abscisse* der Projection wird

$$-c\frac{r_1^2 - r_2^2}{4c^2 - d^2},$$

wesentlich negativ für $r_1 > r_2$ für alle $d < 2c$ und positiv für die $d > 2c$.

Für $d = 2c$ entsteht die *Parabel* des Systems, aus denselben Gründen wie bei der Durchdringung der einfachen Hyperboloide, nämlich weil der Mittelpunkt des zweiten auf dem Asymptotenkegel des ersten liegt, etc. (§ 12); mit ihr sind wir auf den Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises geführt, der ihr Brennpunkt sein wird, und damit zu der Frage nach dem Ähnlichkeitskreis von zwei rein imaginären Kreisen. Wir finden sofort, dass die Abscissen der Ähnlichkeitspunkte I und E durch Einsetzen von ir_1 und ir_2 für r_1 und resp. r_2 ihre Werthe nicht ändern, ebenso wie sein Radius (§ 14); oder *dass der Ähnlichkeitskreis von zwei rein imaginären Kreisen der ihrer Symmetriekreise ist.*

Aber auch die inneren und äusseren gemeinsamen Tangenten haben reelle leicht zu construierende Längen; man erhält ihren Ausdruck aus dem für reelle Kreise

$$\sqrt{4c^2 - (r_1 \pm r_2)^2} \quad \text{in der Form} \quad \sqrt{4c^2 + (r_1 \pm r_2)^2};$$

und ihre graphische Bestimmung folgt auch direct aus der Bemerkung, dass ihre Längen ja Summe resp. Differenz der Radien derjenigen beiden Kreise sind, die um den inneren resp. den äusseren Ähnlichkeitspunkt der Kreise so beschrieben werden, dass sie diese orthogonal schneiden; dass sie also für rein imaginäre Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ zu den Summen resp. Differenzen der Radien der entsprechenden Kreise werden, welche die Symmetriekreise $\mathfrak{K}_{1s}$, $\mathfrak{K}_{2s}$ diametral durchschneiden. Zieht man also die beiden zur Centrale normalen Durchmesser der Symmetriekreise so sind die Längen der neuen Verbindungslinien ihrer Endpunkte die Längen der gemeinsamen Tangenten, der inneren und äusseren, jenachdem sie durch I resp. E gehen; man sieht dabei zugleich, dass durch den Wechsel der Vorzeichen der Radienquadrate wenigstens *die* Veränderung eingetreten ist, dass die inneren gemeinsamen Tangenten jetzt die grössere Länge haben, und dass die Längen beider die Centraldistanz übertreffen, sodass nun die Folge $2c < t_e < t_i$ stattfindet.

Kegelschnitte, welche einen der rein imaginären Kreise vierpunktig im Scheitel berühren, erhält man nicht; die zugehörigen Distanzen sind complex (§ 16); weil sich aber für rein imaginäre Distanzen d und z die zweifachen Hyperboloide in rein imaginäre Kugeln verwandeln, so erhält

man auch jetzt für solche Distanzen nur *imaginäre Kegelschnitte*, immerhin diese letzteren *mit reellen Mittelpunkten und Brennpunktpaaren* ihrer Projectionen.

26. Wir überblicken das Gesammtsystem. Mit $d = 0$ erhält man die *Potenzlinie* als Projection der Durchdringung beider centrischen Hyperboloide d. h. als Ort der Centra von Kreisen, welche sowohl $\mathfrak{K}_{1s}$ als $\mathfrak{K}_{2s}$ diametral schneiden; der zu ihrem Fusspunkte gehörige Kreis dieses Büschels giebt zugleich die entsprechenden Brennpunkte in der Centrale an. Für wachsende d unter dem Werthe $2c$ folgen *Hyperbeln* mit bis Null abnehmenden Asymptotenwinkeln; ihre Mittelpunkte rücken von der Potenzlinie weg auf der der Spurparabel entgegengesetzten Seite bis in's Unendliche für die *Parabel*, die ihren endlichen Brennpunkt im Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises hat. Wir gelangen zu *Ellipsen* für Distanzwerthe $d > 2c$ und $< t_e$ und sehen den Mittelpunkt derselben von der andern Seite der Centrale aus dem Unendlichen heran rücken bis zum äusseren Ähnlichkeitspunkt E der Kreise; dabei verkleinert sich zugleich die Ellipse fortwährend, bis Hauptaxenscheitel und Brennpunkte mit dem Mittelpunkt in E vereinigt sind, entsprechend der *punktförmigen Berührungsdurchdringung der beiden Hyperboloide*, welche zuerst bei der Distanz t_e stattfindet.

Die Projectionen der Durchdringungen und diese selbst werden für weiter wachsende Distanzen zwischen den Werthen t_e und t_i *rein imaginäre Ellipsen*, diese in reellen Ebenen, jene mit reellen Mittelpunkten in der endlichen Strecke zwischen den Ähnlichkeitspunkten und mit reellen Brennpunkten im Ähnlichkeitskreis; es sind die rein imaginären Durchdringungen, auf die wir schon in § 5 hinwiesen als Grundcurven von Büscheln zweifacher Hyperboloide ohne reelle eigentliche Kegel. Für $d = t_i$ fällt alles wieder im *inneren Ähnlichkeitspunkt* zusammen, der Projection der zweiten punktförmigen Berührungsdurchdringung unserer Hyperboloide entsprechend. Die gemeinsame Tangentialebene schneidet in jenem wie in diesem Falle beide Flächen in denselben zwei punktiert und planiert imaginären Geraden, die als die 45° Linien der besagten Ebene betrachtet werden müssen und nicht reell sein können, weil die Tafelneigung der Ebene selbst 45° nicht erreichen kann; die Paare der gemeinsamen Tangenten sind die Projectionen dieser Geraden, ihre Längen im Raume sind ebenfalls reell angebbar, als die $\sqrt{2}$-fachen der Längen ihrer Projectionen — natürlich in beiden Fällen kleiner als die Abstände der paral-

lelen Geraden, in denen ihre Endpunkte als imaginäre Punkte zu suchen sind.

Wächst die Distanz über t_i hinaus weiter, so erhalten wir wieder *reelle Ellipsen*, deren Mittelpunkte vom inneren Ähnlichkeitspunkt bis zum Mittelpunkt der Centrale hin liegen, den letzteren erst für unendlich grosse Distanz erreichend; etc. wie früher.

Wir bemerkten schon, dass das Schneiden resp. Umschliessen des einen Symmetriekreises durch den andern keine wesentlichen Änderungen im Charakter des Systems herbei führt; die unwesentlichen, welche solche Änderungen mit sich bringen, wollen wir nicht erörtern.

Die *Parabel der Wechselsehnen* ist reell wie immer, die Potenzlinie als Scheiteltangente und die Mitte der Centrale als Brennpunkt bestimmen sie; aber die von den Punkten des Ähnlichkeitskreises an die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ gehenden Tangentenpaare sind nicht reell; die Parabel umschliesst diese Kreise.

27. Es bleibt übrig, die Fundamentalsätze über die Summe und Differenz d der Tangentenlängen und über das constante Verhältniss $\operatorname{tg}\alpha$ für die Durchdringung der zweifachen Hyperboloide zu erörtern; für jenen haben die gemeinsamen Tangenten der rein imaginären Kreise uns schon einen Specialfall gezeigt und die cyklographische Auffassung der zweifachen Hyperboloide giebt sofort das allgemeine Resultat. Das zweifache Hyperboloid mit der Tafel als Hauptebene ist der Ort von Punkten, deren Bildkreise den Symmetriekreis seines Hauptschnittes und Bildkreis seiner Scheitelpunkte diametral schneiden, wobei der Radius des Bildkreises der Abstand des Punktes von der Hauptebene ist (§ 1). Durchdringen sich also zwei solche Hyperboloide, so ist für einen Punkt des Durchdringungskegelschnittes zwischen den Hauptebenen beider die *Summe* der Radien seiner Bildkreise auf diesen constant nämlich *der Distanz der Hauptebenen gleich;* d. h. *die Summe der Radien der um seine Projection beschriebenen Kreise, welche beide Symmetriekreise* $\mathfrak{K}_{1s}$ und $\mathfrak{K}_{2s}$ *diametral schneiden* — statt wie die mit den Tangentenlängen beschriebene orthogonal. Und für jeden Punkt der Durchdringung *ausserhalb* der Schicht ist die *Differenz* der Radien der ebenso bestimmten Kreise jener Distanz gleich.

Auch ist ebenso direct anschaulich, dass *das constante Verhältniss* $\operatorname{tg}\alpha$ für eine solche Durchdringung für jeden Punkt ihrer Projection das

Verhältniss ist *zwischen dem Radius des um ihn beschriebenen den Symmetriekreis* $\mathfrak{K}_1$, oder $\mathfrak{K}_2$, *diametral schneidenden Kreises und dem Abstand des Punktes von der zugehörigen Sehne der Doppelberührung* s_1 resp. s_2, der Spur der Durchdringungsebene in der betreffenden Hauptebene; für die Parabel sind diese letzteren Verhältnisse der Einheit gleich.

Und wenn wie im vorigen Falle das eine der Hyperboloide ein einfaches und das andere ein zweifaches ist, so drückt die Distanz der Hauptschnittebenen für alle Punkte in der Projection der Durchdringung die Summe resp. Differenz der Radien derjenigen um sie beschriebenen Kreise aus, von denen der eine die Hauptkreisprojection des einfachen Hyperboloides orthogonal und der andere die Scheitelkreisprojection des zweifachen Hyperboloides diametral schneidet; wird in diesem Falle der erste Kreis von der Durchdringungsprojection reell doppelt berührt, so theilen die Berührungspunkte den Umfang derselben in einen Theil mit constanter Summe innerhalb der Schicht der Hauptschnitte und einen Theil mit constanter Differenz ausserhalb derselben; mit vierpunktiger Berührung verschwindet der eine dieser Theile. Von der Bemerkung aus, dass für die Parabel des Systems im endlichen Bogen zwischen den Berührungspunkten constante Summe stattfindet, charakterisiert man leicht das ganze System in Bezug auf diese Haupteigenschaft.

Für das System des letzten Falles giebt es keine reellen Berührungen und daher keine Übergänge der bezeichneten Art; für die aus der *Potenzlinie* der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ sich entfaltenden *Hyperbeln* gilt ringsum *constante Differenz*; ebenso für die *Parabel* und die ihr bis zur *ersten* dem äusseren Ähnlichkeitspunkt entsprechenden *Berührung* der Flächen folgenden *Ellipsen*; aber die *Ellipsen*, welche auf die *zweite* dem inneren Ähnlichkeitspunkt entsprechende *Berührung* folgen, liegen durchaus innerhalb der bezüglichen Schichten und zeigen ringsum die *constante Summe*. Die dem *äusseren Ähnlichkeitspunkt* entsprechende Differenz t_e ist die *grösste der möglichen Differenzen* und die dem *inneren* entsprechende Summe t_i die *kleinste der möglichen Summen* — die Ergänzung der in §§ 20 bis 22 entwickelten und von Steiner a. a. O. mitgetheilten Eigenschaften den eingeschlossenen Ähnlichkeitspunkte reeller Kreise: Kleinste Differenz resp. grösste Summe der kleinsten Halbsehnen. Die Anschauung führt auf diese wie jene gleich direct; das vorige ist die Theorie der doppelt berührenden rein imaginären Kreise reeller Kegelschnitte, welche sie liefert.

Es ist ersichtlich, dass die allgemeinen Eigenschaften der Durchdringung der Hyperboloide aus §§ 7 f. erst in den letzten Entwickelungen ihre wahrhaft allgemeine Gültigkeit erhalten haben; wir wollen desshalb bemerken, dass für die Constructionen des § 9 für die doppelt berührenden Kegelschnitte zu zwei Kreisen durch einen Punkt und zu einem Kreise durch drei Punkte damit zugleich die Modificationen erhalten wurden, unter denen sie für umschliessende Kreise resp. für rein imaginäre Kreise gültig bleiben — aber die Discussion ihrer bezüglichen Resultate darf hier unterlassen werden.

Die Durchdringungen mit Bezug auf die reellen eigentlichen Kegel im Büschel.

28. Wir kommen zu den Specialfällen von *Hauptkreisen mit verschwindendem Radius* und gehen in der Art vor, dass der Fall *beider* Hauptkreise als punktförmig zuletzt eingehend untersucht wird, während die vorangehenden Fälle nur kurze Erläuterung erhalten.

Ist $\mathfrak{K}_1$ ein *reeller Kreis* und $\mathfrak{K}_2$ ein *Kreis vom Radius Null* oder die eine Fläche ein einfaches Hyperboloid, die andere, die wir eventuell als mit festem $\mathfrak{K}_2$ beweglich denken wollen, ein gleichseitiger Rotationskegel, so fallen die beiden Ähnlichkeitspunkte von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in C_2, dem Mittelpunkt des letzten und die inneren mit den äusseren gemeinsamen Tangenten zusammen; das System der Hyperbeln zwischen ihnen, welches die Nebenaxe in der Centrale und die Brennpunkte im Ähnlichkeitskreis hat, fällt weg wie dieser selbst, bis auf das vereinigte Anfangs- und Endglied. Mit den gemeinsamen Tangenten fallen auch die beiden $\mathfrak{K}_2$ in einem Scheitel vierpunktig berührender Kegelschnitte zusammen.

Für die Lage von C_2 ausserhalb $\mathfrak{K}_1$ erhält man das ganze System durch Projection hyperboloidischer, für die innerhalb $\mathfrak{K}_1$ zum Theil durch Projection sphärischer Durchdringungen; weil aber die eine der Kugeln die aus dem Kegel entspringende vom Radius Null ist, so reduciert sich die Gruppe der daraus entspringenden reellen Kegelschnitte auf den Punkt C_2. Wir erhalten in beiden Fällen die Potenzlinie von $\mathfrak{K}_1$ und C_2 für $d = 0$ als Projection einer reellen zur Tafel symmetrischen Durch-

dringungshyperbel; C_2 ist der eine und der zu ihm in Bezug auf die Potenzlinie orthogonalsymmetrische Punkt der andere Brennpunkt ihrer Projection. Dann folgen für wachsende Distanzen *Hyperbeln*, deren einer Ast $\mathfrak{K}_1$ und der andere C_2 umschliesst, mit der Distanz $\sqrt{4c^2 - r_1^2}$ durch die gemeinsamen Tangenten getrennt von den anderen. *Hyperbeln* von denen der nämliche Ast $\mathfrak{K}_1$ und C_2 umschliesst; die aus $d = 2c$ entspringende *Parabel* führt zu den *Ellipsen* über, etc. Unter den Hyperbeln der ersten Art ist eine in B_1 an $\mathfrak{K}_1$ vierpunktig berührende für $d = 2c - r_1$ und unter den Ellipsen die bei A_1 an $\mathfrak{K}_1$ vierpunktig berührende für $d = 2c + r_1$; sie trennen die $\mathfrak{K}_1$ reell von den ihn imaginär doppelt berührenden Hyperbeln resp. Ellipsen. Mit der Angabe, dass für die Parabel des Systems im endlichen Bogen zwischen den Berührungspunkten an $\mathfrak{K}_1$ constante Summe zwischen der Länge der Tangente an $\mathfrak{K}_1$ und der Distanz von C_2 stattfindet, ergeben sich alle andern Bestimmungen dieser Art im System. Für jede Distanz d erhält man den mit ihr aus C_2 beschriebenen Kreis als $\mathfrak{K}_{2d}$ und seine Potenzlinie mit $\mathfrak{K}_1$ als die zugehörige Berührungssehne; ebenso den Kreis aus $\mathfrak{K}_1$ mit dem Radiusquadrat $r_1^2 + d^2$ als $\mathfrak{K}_{1d}$ und seine Potenzlinie mit C_2 als die zugehörige Berührungssehne oder die Directrix für den Brennpunkt C_2 der Durchdringungsprojection. Die *Mittelpunktsabscisse* hat den Werth $\frac{cr_1^2}{4c^2 - d^2}$, C_2 ist die Vereinigung der Doppelpunkte der *Brennpunktsinvolution*, die *parabolisch* ist und stets als den zu ihm symmetrischen in Bezug auf den Mittelpunkt den andern Brennpunkt liefert.

Für *C_2 im Innern des reellen Kreises $\mathfrak{K}_1$* ergeben sich Unterschiede wie in § 22, jenachdem C_2 dem Mittelpunkt C_1 oder der Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}_1$ näher liegt.

Die Parabel der Spuren in der Axenebene hat C_2 zum Brennpunkt und wie die Parabel der Wechselsehnen die Potenzlinie zur Scheiteltangente, während für diese die Mitte der Centrale der Brennpunkt ist; diese letztere berührt auch $\mathfrak{K}_1$ in den Berührungspunkten der Tangenten aus C_2, welche die einzigen reell begrenzten Wechselsehnen sind. Der *Grenzfall*, wo C_2 in der Peripherie von $\mathfrak{K}_1$ liegt und die Potenzlinie die zugehörige Tangente ist, liefert die über dem Drittheil des Umfangs reell doppelt berührende Parabel und eine der Potenzlinie gegenüber in A_1 vierpunktig berührende Ellipse für $d = 2r_1$, während die vierpunktig be-

rührende Hyperbel sich ebenfalls mit der Potenzlinie und den gemeinsamen Tangenten verschmolzen hat.

29. Wäre $\mathfrak{K}_1$ *rein imaginär* und durch $\mathfrak{K}_{1s}$ vertreten, so entsteht das System aus Durchdringungen des festen zweifachen Hyperboloides mit $\mathfrak{K}_{1s}$ als Bildkreis der Scheitel mit dem längs seiner Axe verschiebbar gedachten Kegel $\mathfrak{K}_2$. Die Potenzlinie ist nicht mehr wie vorher der Ort der Centra der Kreise durch C'_2, welche $\mathfrak{K}_1$ orthogonal sondern welche $\mathfrak{K}_{1s}$ diametral schneiden, aber der zu ihr symmetrische Punkt von C_2 ist noch immer der andere Brennpunkt der zugehörigen Hyperbelprojection. Es folgen die Hyperbeln der ersten und dritten Gruppe — ohne eine vierpunktig berührende — sodann die *Parabel* für $d = 2c$, und nach ihr in zwei Gruppen getrennt durch die punktförmige Durchdringungsprojection für die Lage der Kegelspitze im Mantel des Hyperboloides bei $d = \sqrt{4c^2 + r_1^2}$ Ellipsen; die erste Gruppe als Projectionen von Durchdringungen ganz *ausserhalb* der Schicht mit ringsum constanter *Differenz*, die zweite Gruppe als solche von *innerhalb* mit constanter *Summe*. Der Punkt C'_2 ist zugleich die einzige vierpunktig berührende Ellipse des Systems, mit der grössten Differenz und hier zugleich der kleinsten Summe der Distanz von C'_2 und des Radius eines um ihn beschriebenen $\mathfrak{K}_{1s}$ diametral schneidenden Kreises.

Zu dem Falle *von zwei Kreisen mit dem Radius Null* oder von zwei Kegeln als den sich durchdringenden Flächen können wir durch gleichmässige Veränderung der absoluten Werthe der Radien sowohl von *zwei gleichen reellen als zwei gleichen imaginären* Kreisen aus gelangen d. h. dieselben Kegel können als Asymptotenkegel von einfachen wie von zweifachen Hyperboloiden von gleichem Radius erhalten werden; wir betrachten daher kurz die Besonderheiten des Falles *gleicher Kreise*. Im Falle ihrer Realität (Fig. 12) haben wir die Durchdringungen von zwei gleichen einfachen, im andern Falle die von zwei gleichen zweifachen Hyperboloiden, deren eines centrisch und ruhend und das andere beweglich bei fester Hauptkreisprojection gedacht wird. In beiden Fällen geht die Potenzlinie p durch die Mitte der Centrale M, mit der auch der innere Ähnlichkeitspunkt I zusammenfällt, während der äussere unendlich fern liegt, sodass die Potenzlinie zugleich den im Endlichen liegenden Theil des Ähnlichkeitskreises bildet. In beiden Fällen sind für irgend eine Distanz d die Potenzlinien von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ durch $4cx = \mp d^2$ gegeben oder zur Mitte der Centrale symmetrisch, der Anschauung entsprechend: *Beide Kreise werden*

gleichzeitig reell und resp. imaginär doppelt berührt und die Berührungspunkte bilden ein Rechteck mit M als Mittelpunkt und den Seiten parallel und normal zur Centrale, sodass M der gemeinsame Mittelpunkt aller Kegelschnitte des Systems ist, wie der Nullwerth der Mittelpunktsabscisse bestätigt. Im Falle reeller Kreise berühren auch die nämlichen beiden Kegelschnitte des Systems beide zugleich in A_2 und B_1 resp. A_1 und B_2 vierpunktig; eine Hyperbel und eine Ellipse, wenn die Kreise ausser einander liegen, eine umschlossene und eine umschliessende Ellipse, jene aus einer Kugel und diese aus einer Hyperboloid-Durchdringung, wenn sie einander schneiden wie in Fig. 12. Im Falle *imaginärer gleicher Kreise* existieren solche nicht, weil überhaupt keine reellen Berührungen möglich sind. In beiden Fällen sind *die äusseren gemeinsamen Tangenten* von derselben Länge $2c$ und vertreten die *Parabel des Systems,* die in zwei parallele Gerade zerfallen muss, weil ihr Brennpunkt als Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises im Unendlichen liegt, — die inneren gemeinsamen Tangenten haben im ersten resp. zweiten Falle die Längen $2\sqrt{c^2 - r_1^2}$ und $2\sqrt{c^2 + r_1^2}$ und markieren die Verschiedenheit der Distanzen, in denen die Berührung bei einfachen und bei zweifachen Hyperboloiden stattfindet; im ersten Falle sind die innern wie die äussern Tangenten reelle Durchdringungsprojectionen und selbst reell, im zweiten sind sie imaginär, wie die Berührungsdurchdringungen der zweifachen Hyperboloide sein müssen. Die Parabel der Spuren wird wie sonst durch die Ebene der Durchdringungsparabel bestimmt, und hat daher C_2 zum Brennpunkt, während die Directrix durch C_1 geht; die Parabel der Wechselsehnen ist in den Mittelpunkt und den unendlich fernen Punkt der Centrale degeneriert, weil die *Wechselsehnen offenbar theils Durchmesser des Kegelschnittes, theils Parallelen zur Centrale* sind.

Die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2^i$, den $\mathfrak{K}_{2s}$ vertritt, haben keine reellen Ähnlichkeitspunkte und die Quadrate der Längen der gemeinsamen Tangenten sind complex, aber der Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises hat bei gleichen absoluten Werthen ihrer Radien die Abscisse 0 und sein Radius ist ic oder sein Symmetriekreis ist der durch C_1 und C_2 gehende Kreis aus M. Die Mittelpunkts-Abscisse ist negativ für alle Hyperbeln und positiv für alle Ellipsen des Systems. Die an $\mathfrak{K}_2$ in A_2 und B_2 resp. vierpunktig berührenden Kegelschnitte entsprechen den reellen Distanzen $\sqrt{(2c - r_1)^2 + r_1^2}$ und $\sqrt{(2c + r_1)^2 + r_1^2}$ und die Potenzlinie ist $2cx = - r_1^2$, geht also nicht

durch die Mitte der Centrale, sodass die von den Wechselsehnen umhüllte Parabel nicht degeneriert. Das System ist dem allgemeinen des Falles wesentlich analog.

30. Mit dem Verschwinden von r_1 gehen alle drei vorher betrachteten Fälle in den *Fall mit zwei Nullkreisen* oder festen Brennpunkten C_1, C_2 und festem Mittelpunkt M (Fig. 13, 14) über. Für jede Distanz d liefern die mit ihr um C_1, C_2 beschriebenen Kreise $\mathfrak{K}_{1d}$, $\mathfrak{K}_{2d}$ als ihre Potenzlinien mit $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_1$ resp. die zu C_2, C_1 gehörigen Directrixen; für $d < 2c$ liegen ihre Fusspunkte in der endlichen Strecke C_1C_2 und die entstehenden Kegelschnitte sind *Hyperbeln*, die sich aus der durch M gehenden Potenzlinie ($d = 0$) entfalten, die Hyperbeln der ersten Gruppe des allgemeinen Falles reeller aussereinander liegender Kreise; die Hyperbeln der zweiten und dritten Gruppe sind mit ihrer Grenze, der *Parabel*, vereinigt, weil $t_i = t_e = 2c$ ist, und diese Parabel wird von der doppeltzählenden Linie C_1C_2 gebildet, der Projection der *Berührungsdurchdringung der beiden Kegel*, für die die Directrixen durch die zugehörigen Brennpunkte gehen. Auf C_1C_2 ist zwischen diesen Punkten die *Summe* und ausserhalb die *Differenz* der Radien Vectoren constant, auf den sämmtlichen *Hyperbeln* die *Differenz*. Für alle $d > 2c$ liegen die Directrixen ausserhalb C_1C_2 und die *elliptischen* Durchdringungen ganz innerhalb der Schicht, sodass in allen *Ellipsen* des Systems ringsum die *Summe* der Radien Vectoren constant ist; die Entfernung der Scheitel A, B giebt diese Summe wie vorhin die Differenz, weil in dem Rechteck aus 45° Linien (vergl. § 10) $M_1(A)M_2(B)$ der Horizontalabstand der Gegenecken (A), (B) d. i. AB dem Verticalabstand der Gegenecken M_1, M_2 oder d gleich ist. Das System schliesst mit dem unendlich grossen Kreise um M; die vierpunktig berührenden desselben sind mit den degenerierten und der Parabel in der doppelt zählenden Centrale vereint. Die *Wechselsehnen* sind entweder Durchmesser aller Kegelschnitte des System oder der Centrale parallel aus denselben Gründen wie vorher. Für jeden Kegelschnitt des Systems ist auch das Verhältniss der Entfernungen seiner Punkte von einem Brennpunkte zu den Entfernungen derselben Punkte von der zugehörigen Directrix constant, der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels α der Durchdringungsebene zur Tafel gleich, daher auch für beide Paare von Brennpunkt und Directrix dasselbe und für alle Hyperbeln grösser, für alle Ellipsen kleiner als Eins; diese Constante soll hinfort die

numerische Excentricität ε des Kegelschnittes genannt werden. Im Zusammenhange der Kegel mit den Hyperboloiden des Flächenbüschels, und unter Rückkehr zur Untersuchung *eines* Kegelschnittes als der Projection des endlichen Theiles der Grundcurve desselben, werden wir die Constante ε in vielseitige Beziehungen treten sehen. Wir denken dazu *eines der Hyperboloide des Büschels und die beiden Kegel desselben*, nehmen die Hauptschnittebene von jenem als Tafel und setzen die Kegel als durch ihre Spurkreise $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ in dieser Tafel gegeben voraus; ihre Mittelpunkte mögen wie bisher C_1, C_2 heissen, aber nach ihrer jetzigen veränderten Bedeutung sollen ihre Radien durch v_1, v_2 unterschieden werden — sie sind die Längen der Radien Vectoren der Kegelschnittpunkte P, P^*, welche beide Kreise in ihren Schnittpunkten hervorbringen. Ist die Durchdringung *hyperbolisch*, so liegen dann beide Kegelmittelpunkte M_1, M_2 auf derselben Seite der Tafel und der Durchstosspunkt der Verbindungslinie derselben, der Mittelpunktslinie des Büschels (§ 4), also der Mittelpunkt desjenigen Hyperboloides in demselben, welches die Tafel zur Hauptebene hat, ist der *äussere* Ähnlichkeitspunkt E der beiden Kreise; ist dagegen die Durchdringung *elliptisch*, so liegen die Kegelmittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Tafel und der Durchstosspunkt ihrer Verbindungslinie ist der *innere* Ähnlichkeitspunkt I der Kreise; in jenem Falle ist der aus E und in diesem Falle der aus I beschriebene Kreis des Büschels $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ der Hauptkreis des Hyperboloides, zugleich immer der in den Punkten von den Vectoren v_1, v_2 doppelt berührende Kreis der vorigen Entwickelungen — der *Potenzkreis* der gegebenen Kreise aus den ersten Arbeiten J. Steiner's. Er ist reell, wenn das Hyperboloid ein einfaches ist und imaginär, wenn ein zweifaches, also nach den in § 5 entwickelten Regeln; wenn die Kreise $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sich schneiden, so sind beide Potenzkreise reell d. h. Kehlkreise einfacher Hyperboloide und in P, P^* reell doppelt berührend; liegen die Kreise ausser einander, so ist der Potenzkreis um E reell und ein Kehlkreis, aber nicht reell doppelt berührend, während der Potenzkreis um I der Scheitelkreis eines zweifachen Hyperboloides oder Vertreter eines rein imaginären Kreises ist; und wenn der eine Kreis den andern umschliesst, ist der äussere Potenzkreis ein Scheitelkreis und der innere ein Kehlkreis. Im ersten Fall, dem Falle reeller und reell doppelt berührender Potenzkreise, ist der Radius r_e des äusseren die Normale der Hyperbel nach Lage und Grösse im üblichen Sinn und

der des andern r_i die Lage und Grösse der Tangente derselben, beides für die Punkte P, P^*: zugleich ist r_i die Normale der Ellipse und r_e die Tangente derselben in denselben beiden Punkten. Der orthogonale Schnitt der confocalen Kegelschnitte in einem Punktepaar und die Eigenschaft der Potenzkreise, die Winkel zwischen den Grundkreisen zu halbieren und desshalb einander rechtwinklig zu schneiden, sind äquivalent.[1] Im zweiten und dritten Falle sind E und I nur noch die reellen Schnittpunkte zusammengehöriger aber nicht reeller Paare von Tangenten und Normalen, ein Paar der Brennpunkts-Involution.

31. Der erste Fall umfasst alle reellen Punkte des Kegelschnittes und mag nach einander für den Fall der *Ellipse* und für den der Hyperbel, endlich in Verbindung für beide näher untersucht werden. Man hat (Fig. 13) $C_1C_2 = 2c$, $AB = 2a = v_1 + v_2$ die Hauptaxenlänge, und setze $C_1I = i_1$, $C_2I = i_2$, $IP = IP^* = r_i$; dann ist der Neigungswinkel der Ebene der Durchdringungs-Ellipse zur Tafel gleich dem Winkel zwischen der Mittelpunktsgeraden M_1M_2 und den Axen der Kegel, beide haben das Verhältniss $c:a$ zur trig. Tangente, die *numerische Excentricität der Ellipse.* In der Figur der Umlegung der Kegelmantellinien aus der Axenebene, die diess zeigt, wenn man z. B. mittelst der Parallelen M_2C zur Centrale aus M_2 (C ist der Schnittpunkt mit der Axe M_1C_1) durch Schnitt mit $(A)(B)$ die dem Brennpunkt C_2 entsprechende Directrix bestimmt, geben die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke M_1M_2C, M_1IC_1, M_2IC_2 als Verhältnisse der Katheten

$$(v_1 + v_2):2c = a:c = 1:\varepsilon = v_1:i_1 = v_2:i_2;$$

woraus

$$i_1v_2 = i_2v_1, \qquad i_1 = \frac{c}{a}v_1 = \varepsilon v_1, \qquad i_2 = \frac{c}{a}v_2 = \varepsilon v_2$$

und somit

$$i_1 + i_2 = \frac{c}{a}.2a = 2c = \varepsilon(v_1 + v_2),$$

aber auch

$$i_1i_2 = \frac{c^2}{a^2}v_1v_2 = \varepsilon^2v_1v_2$$

---

(1) Für die systematische Ableitung dieser letzteren Eigenschaft sehe man § 64 meiner *Cyklographie.*

folgt. Ferner ist die Potenz des inneren Ähnlichkeitspunktes I oder das Radiusquadrat des inneren Potenzkreises

$$p_i = r_i^2 = IA_1 . IA_2 = (v_1 + i_1)(v_2 - i_2) = v_1 v_2 - i_1 i_2$$

wegen $i_1 v_2 = i_2 v_1$ und somit

$$r_i^2 = v_1 v_2 (1 - \varepsilon^2) = v_1 v_2 \frac{a^2 - c^2}{a^2} = i_1 i_2 \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = i_1 i_2 \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

d. h. durch Einführung der kleinen Halbaxe mit $b^2 = a^2 - c^2$

$$r_i^2 = v_1 v_2 \frac{b^2}{a^2} = i_1 i_2 \frac{b^2}{c^2}.$$

Dies sind die Relationen und man formuliert sie leicht zu den Sätzen, welche J. Steiner in der Abhandlung von 1847 *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften* (Crelle's Journal, Bd. 37, p. 161—192) gegeben hat; wir werden dieselbe weiterhin durch St. 1847 mit der pag. der Werke Bd. II citieren, hier als p. 393 f.

Man erhält den Cos. des Winkels γ zwischen der Normale und den Radien Vectoren ihres Fusspunktes als Hälfte des Winkels P im Dreieck $C_1 P C_2$ nach der Regel $\cos\frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ ausgedrückt durch

$$\cos\frac{1}{2}(r_1, r_2) = \cos\gamma = \sqrt{\frac{(v_1 + v_2 + 2c)(v_1 + v_2 - 2c)}{4 v_1 v_2}} = \sqrt{\frac{(a+c)(a-c)}{v_1 v_2}} = \frac{b}{\sqrt{v_1 v_2}},$$

oder durch Einsetzen von $v_1 v_2 = \frac{a^2}{b^2} r_i^2$ auch

$$\cos\gamma = \frac{b^2}{a r_i} \quad \text{oder} \quad r_i \cos\gamma = \frac{b^2}{a} = p$$

für p als den Halbparameter: Die Projection der Normale auf den Radius Vector ist dem Halbparameter, der Länge der Brennpunktsordinate, gleich, deren Product mit der grossen Halbaxe mit dem Quadrat der kleinen übereinstimmt. (St. 1847; p. 394, (14).) Ist γ' der entsprechende halbe Winkel der Radien Vectoren am Endpunkte P' des zum Durchmesser $MP = b_1$ von P conjugierten Durchmessers a_1, so hat man wegen $a_1 = \sqrt{v_1 v_2}$

$$a_1 \cos\gamma = b; \quad \text{ebenso} \quad b_1 \cos\gamma' = b$$

und somit in Folge von

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2\gamma = \frac{a_1^2 - b^2}{b^2}, \qquad \operatorname{tg}^2\gamma' = \frac{b_1^2 - b^2}{b^2}$$

$$\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\gamma' = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Für die Axenscheitel ist $\operatorname{tg}^2\gamma' = 0$, $\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{c^2}{b^2}$ (a. a. O. p. 396). Und in dem besonderen Falle

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad b = c, \quad a = c\sqrt{2}$$

erhält man

$$i_1 i_2 = \frac{1}{2} v_1 v_2 = r_i^2, \qquad r_i \cos\gamma = p = c\sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad \operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\gamma' = 1, \text{ etc.}$$

32. Eine ganz analoge Entwickelung ergiebt sich für die *Hyperbel*. Die Hauptaxe (Fig. 14) $AB = 2a$ ist $= v_1 - v_2$; wir setzen $C_1E = e_1$, $C_2E = e_2$, $EP = EP' = r_e$ und haben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a} > 1$. Aus den wie vorher und für den gleichen Zweck gebildeten rechtwinkligen Dreiecken M_1M_2C, M_1EC_1 und M_2EC_2 folgen dann als Verhältnisse der Katheten

$$(v_1 - v_2) : 2c = a : c = 1 : \varepsilon = v_1 : e_1 = v_2 : e_2;$$

also

$$e_1 v_2 = e_2 v_1, \qquad e_1 = \frac{c}{a} v_1 = \varepsilon v_1, \qquad e_2 = \frac{c}{a} v_2 = \varepsilon v_2$$

und somit

$$e_1 - e_2 = \frac{c}{a}(v_1 - v_2) = 2c = \varepsilon(v_1 - v_2),$$

aber auch

$$e_1 e_2 = \frac{c^2}{a^2} v_1 v_2 = \varepsilon^2 v_1 v_2.$$

Sodann ist die Potenz des äusseren Ähnlichkeitspunktes E unserer Kreise oder das Radiusquadrat des äusseren Potenzkreises

$$p_e = r_e^2 = EB_1 . EA_2 = (e_1 - v_1)(e_2 + v_2) = e_1 e_2 - v_1 v_2$$

weil $e_1 v_2 = e_2 v_1$ ist und somit

$$r_e^2 = v_1 v_2 (\varepsilon^2 - 1) = v_1 v_2 \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e_1 e_2 \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} = e_1 e_2 \frac{c^2 - a^2}{c^2}$$

oder mit $b^2 = c^2 - a^2$

$$r_e^2 = v_1 v_2 \frac{b^2}{a^2} = e_1 e_2 \frac{b^2}{c^2}.$$

Diese und die entsprechende Formel in § 31 bilden die von St. 1852, p. 453 gegebene zweite Regel zur Bestimmung der Axenlängen; die Formel zur Bestimmung der Distanz a. a. O. p. 454 ist der Ausdruck von $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a}$ mittelst der Distanz d und der Centraldistanz der doppelt berührenden Kreise.

Man erhält den Cos. des Winkels der Normale mit den Radien Vectoren ihrer Fusspunkte als des halben Nebenwinkels zu dem Winkel bei P im Dreieck $C_1 P C_2$ nach der Regel $\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ mit

$$\cos \frac{1}{2}(v_1, v_2) = \cos\gamma = \sqrt{\frac{(v_2 - v_1 + 2c)(v_1 - v_2 + 2c)}{4 v_1 v_2}} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{v_1 v_2}} = \frac{b}{\sqrt{v_1 v_2}},$$

also durch Einsetzen von $v_1 v_2 = \frac{a^2}{b^2} r_e^2$

$$\cos\gamma = \frac{b^2}{a r_e} \quad \text{oder auch} \quad r_e \cos\gamma = \frac{b^2}{a} = p$$

dem Halbparameter. Der Satz vom Halbparameter als Projection der Normale auf den Radius Vector ist durch seine Fassung als von der Grösse und Realität der Axen unabhängig und für alle Kegelschnitte gültig charakterisiert.

In dem besonderen Falle

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}, \qquad \varepsilon^2 = 2 \quad \text{wird} \quad b^2 = a^2 \quad \text{und} \quad c = a\sqrt{2},$$

also — es ist die gleichseitige Hyperbel —

$$e_1 e_2 = 2 v_1 v_2 = 2 r_e^2; \qquad r_e \cos\gamma = c\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(St. 1847; p. 397 f.).

Die Normale ist das geometrische Mittel zwischen den Radien Vectoren und da auch der Halbmesser MP bei der gleichseitigen Hyperbel diesem geometrischen Mittel gleich ist, so sind *für die gleichseitige Hyperbel Normale und Radius einander gleich* — eine wesentliche Analogie derselben zum Kreis.

33. Setzt man die Verhältnisszahlen vom Quadrat der Normale zum Product der Abschnitte, in welche sie die Brennpunkt-Distanz zerlegt — bei der Ellipse innerlich, bei der Hyperbel äusserlich — derselben Zahl q gleich, so hat man aus der Entwickelung für die Ellipse und aus der für die Hyperbel resp.

$$\varepsilon^2 - 1 = q\varepsilon^2, \qquad \varepsilon^2 = \frac{1}{1-q}; \qquad 1 - \varepsilon^2 = q\varepsilon^2, \qquad \varepsilon^2 = \frac{1}{1+q}$$

und erhält für das Verhältniss der Hauptaxen dieser Ellipse und Hyperbel, weil dieselben durch $\frac{2c}{\varepsilon}$ in beiden Fällen ausgedrückt werden

$$\sqrt{1+q} : \sqrt{1-q};$$

zugleich ist in beiden Curven das Quadrat der Nebenaxe, abgesehen vom Zeichen, nach demselben Verhältniss zu q proportional. Ist dann S einer der Schnittpunkte dieser Kegelschnitte, so hat man für die Quadrate seiner Normalen in beiden

$$r_i^2 : i_1 i_2 = r_e^2 : e_1 e_2 = q;$$

das Dreieck C_1SC_2 muss an der Ecke S rechtwinklig sein und der über C_1C_2 als Durchmesser beschriebene Kreis ist der Ort der Durchschnittspunkte der Paare von Kegelschnitten, welche mit denselben Brennpunkten gebildet werden für alle möglichen Werthe des Verhältnisses zwischen dem Quadrat der Normale und dem Product der von ihrem Fusspunkt in der Geraden zwischen jenen gebildeten Abschnitte. (St. 1847; p. 398.) Man ist damit auch zu der *Fragestellung* geführt, von welcher Steiner in dieser Abhandlung ausgeht: »Aus der Spitze C eines Dreieckes ABC nach einem Punkte D der Grundlinie eine Gerade CD zu ziehen, deren Quadrat zu den Abschnitten der Grundlinie $AD.BD$ ein gegebenes Verhältniss hat, wie $m:n$. Wenn die Grundlinie AB der Grösse und Lage nach gegeben ist, so soll die Grenzlage für die Spitze C gefunden werden, über welche

hinaus die vorige Forderung unmöglich wird.» Diese Grenze wird von den beiden Kegelschnitten der vorigen Betrachtung als den Enveloppen ihrer reell doppelt berührenden Kreise gebildet. (Vergl. besonders die II. Auflös. a. a. O. p. 399 f.)

34. Für die confocalen Kegelschnitte, welche sich in P, P^* durchschneiden, ist die zugehörige Normale des einen zugleich die Tangente des andern; beide Gerade schneiden die Nebenaxe der Kegelschnitte, wir wollen setzen (Fig. 15) in Punkten I^* und E^*, und geben dadurch in PI^*, PE^* die Radienlängen r_i^* und r_e^* doppelt berührender Kreise anderer Gruppen für dieselben Kegelschnitte. Sie bringen dadurch mit den Axen ähnliche Dreiecke hervor, die zu einer Fülle weiterer Relationen führen. Es ist

$$\Delta MII^* \sim \Delta ME^*E \sim \Delta PIE \sim \Delta PE^*I^*$$

und somit die Proportionen-Kette

$$MI : II^* : I^*M = ME^* : E^*E : EM = PI : IE : EP = PE^* : E^*I^* : I^*P,$$

aus deren durch das vorige bekannten Gliedern sich alle übrigen ausdrücken lassen. Wir wollen zur Abkürzung $v_1 + v_2 = 2a$, $v_1 - v_2 = 2a'$ setzen und die Nebenaxen b, b' wie früher einführen und haben dann

$$MI = c - i_2 = c\frac{a'}{a}, \quad EM = c + e_2 = c\frac{a}{a'}, \quad PI = r_i = \frac{1}{a}\sqrt{v_1 v_2 (a^2 - c^2)} = \frac{b}{a}\sqrt{v_1 v_2},$$

$$IE = e_2 + i_2 = \frac{c v_1 v_2}{a a'}, \quad EP = r_e = \frac{1}{a'}\sqrt{v_1 v_2 (c^2 - a'^2)} = \frac{b'}{a'}\sqrt{v_1 v_2}.$$

Daraus finden wir

$$II^* = \frac{c^2}{ab}\sqrt{v_1 v_2}, \qquad I^*M = c\frac{b'}{b}, \qquad ME^* = c\frac{b}{b'}, \qquad E^*E = \frac{c^2}{a'b'}\sqrt{v_1 v_2},$$

$$PE^* = \frac{a'}{b'}\sqrt{v_1 v_2}, \qquad E^*I^* = \frac{c v_1 v_2}{bb'}, \qquad I^*P = \frac{a}{b}\sqrt{v_1 v_2}.$$

Diese Relationen laden zu Verbindungen ein und liefern z. B.

$$PI . II^* = \frac{c^2}{a^2} v_1 v_2 = i_1 i_2 = C_1 I . IC_2$$

und

$$EP.EE^* = \frac{c^2}{a'^2} v_1 v_2 = e_1 e_2 = C_1 E . EC_2$$

— woraus auch $PE.EE^* : PI.II^* = a^2 : a'^2$ folgt — und man sieht damit, dass die Punkte P, I^*, C_1, C_2 und wieder P, E^*, C_1, C_2 auf einem und natürlich demselben Kreise liegen. Daraus folgert man wieder die Ähnlichkeiten

$$\Delta PIC_1 \sim \Delta PC_2 I^* \sim \Delta C_2 II^*, \qquad \Delta PI^* C_1 \sim \Delta PC_2 I \sim \Delta C_1 I^* I,$$

und ebenso

$$\Delta PEC_1 \sim \Delta PC_2 E^* \sim \Delta C_2 EE^*, \qquad \Delta PE^* C_1 \sim \Delta PC_2 E \sim \Delta C_1 E^* E,$$

aus denen entsprechende Proportionenreihen hervorgehen, welche nun liefern z. B.

$$C_2 I^* = C_1 I^* = \frac{c}{b}\sqrt{v_1 v_2}, \qquad C_2 E^* = C_1 E^* = \frac{c}{b'}\sqrt{v_1 v_2}$$

und daraus

$$I^* P : \widehat{I^* C_1} = a : c, \qquad E^* P : \widehat{E^* C_1} = a' : c,$$

die erste Formel zur Bestimmung der Axenlängen in St. 1852; p. 453.

Ferner

$$II^* : C_1 I^* = c : a = C_1 I^* : PI^*, \quad EE^* : C_1 E^* = c : a' = C_1 E^* : PE^*;$$

$$PI : PI^* : II^* = b^2 : a^2 : c^2, \qquad PE : PE^* : EE^* = b'^2 : a'^2 : c^2;$$

$$PE^* . EE^* : PI^* . II^* = b^2 : b'^2; \text{ etc.}$$

Ebenso $PE^* . PE = v_1 v_2 = PI^* . PI$, (St. 1847; p. 395 bis p. 397.)

$$PI^* . II^* = \frac{c^2 v_1 v_2}{b^2}, \qquad PE^* . EE^* = \frac{c^2 v_1 v_2}{b'^2}; \text{ etc.}$$

Für die gleichseitige Hyperbel mit $c = a'\sqrt{2}$ und die entsprechende Ellipse mit $a = c\sqrt{2}$ erhält man auch

$$v_1 v_2 = \frac{1}{2}\overline{C_1 E^*}^2 - \overline{E^* P}^2 = \frac{1}{4}\overline{EE^*}^2 = \frac{1}{2} PE^* . EE^*, \quad PE : EE^* : E^* P = 1 : 2 : 1;$$

resp.

$$r_1 r_2 = \overline{C_1 I^*}^2 = \frac{1}{2}\overline{I^*P}^2 = 2\overline{II^*}^2 = PI^*.II^*, \qquad PI:II^*:I^*P = 1:1:2.$$

Endlich, um nur noch ein Beispiel zu geben, wird

$$PI:PI^* = b^2:a^2 \quad \text{und} \quad PE:PE^* = b'^2:a'^2,$$

d. h. die Abschnitte der Normalen eines Kegelschnittes vom Fusspunkt bis zur Haupt- und Nebenaxe stehen zu einander im Verhältniss der Quadrate der Neben- und Hauptaxe; oder *irgend zwei Normalen* z. B. PII^* und $P_1 I_1 I_1^*$ *eines Kegelschnittes werden durch dessen Axen ähnlich getheilt und sind daher mit diesen und der Sehne zwischen ihren Fusspunkten Tangenten derselben Parabel.* Die Berührungspunkte der Normalen mit den aus ihnen, den zugehörigen Tangenten und den Axen bestimmten Parabeln sind die zugehörigen *Krümmungs-Centra* des Kegelschnittes als Schnittpunkte jener Normalen mit den ihnen unendlich nahe benachbarten; etc.

35. Für *die vierpunktig berührenden Kreise in den Scheiteln der Hauptaxe* ist

$$PI^* = a \quad \text{resp.} \quad PE^* = a'$$

und

$$v_1 v_2 = (a + c)(a - c) \quad \text{resp.} \quad v_1 v_2 = (c + a')(c - a');$$

daher

$$MI = c\frac{v_1 - v_2}{r_1 + r_2} = \frac{c^2}{a}, \quad \text{resp.} \quad ME = c\frac{v_1 + v_2}{r_1 - r_2} = \frac{c^2}{a'}.$$

Die zugehörigen *Radien* sind

$$a - \frac{c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \quad \text{und resp.} \quad \frac{c^2}{a'} - a' = \frac{b'^2}{a'}$$

(vergl. St. 1847; p. 400); für die besondere Ellipse $a = c\sqrt{2}$ und die gleichseitige Hyperbel $c = a'\sqrt{2}$ haben beide denselben Werth $\frac{c}{\sqrt{2}}$. Stereometrisch sind sie immer die normal zu den Kegelaxen gemessenen Abstände der Scheitel (A) und (B) der Durchdringung von der Linie der Centra $M_1 M_2$ im Flächenbüschel.

Die zugehörigen *Krümmungsmittelpunkte* liegen in den Abständen

$$c - \frac{c^2}{a} \quad \text{und resp.} \quad \frac{c^2}{a'} - c$$

von den Brennpunkten, bei der Ellipse in dem endlichen Segment zwischen ihnen, bei der Hyperbel ausserhalb desselben; sie begrenzen die Region der Mittelpunkte reeller und reell doppelt berührender Kreise, dieselbe bei der Ellipse einschliessend und bei der Hyperbel ausschliessend. In den zwischen ihnen und den benachbarten Brennpunkten liegenden Strecken liegen die Mittelpunkte der imaginär doppelt berührenden reellen Kreise, die mit den Brennpunkten selbst als solchen vom Radius Null schliessen.

Zugleich sind PI^* und PE^* resp. die Radien doppelt berührender Kreise der Ellipse und der Hyperbel *aus Punkten ihrer Nebenaxen* mit MI^* resp. ME^* als den Abständen ihrer Centra vom Mittelpunkte. Sind v_1 und v_2 für die Ellipse gleich a oder ist P der Scheitel der Nebenaxe, so erhält man für den zugehörigen Radius des vierpunktig berührenden Kreises und den Mittelpunktsabstand seines Mittelpunktes

$$PI^* = \frac{a^2}{b} \quad \text{und} \quad MI^* = \frac{c^2}{b};$$

bei der Hyperbel ist im gleichen Falle

$$PE^* = \frac{a'^2}{b'} \quad \text{und} \quad ME^* = \frac{ic^2}{b'}.$$

(Vergl. St. 1847; p. 400.) Damit sind die beiden Systeme doppelt berührender Kreise, welche wir früher fanden, in ihren metrischen Beziehungen hervorgetreten.

Wir bemerken schliesslich die durch die entwickelten Ausdrücke angezeigten Relationen für die Ellipse und respective Hyperbel

$$\frac{\overline{MI}^2}{a^2 - b^2} + \frac{\overline{PI}^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{\overline{PI}^2}{a^2} - \frac{\overline{MI}^2}{a^2 - b^2} = 1;$$

$$\frac{\overline{ME}^2}{a'^2 + b'^2} - \frac{\overline{PE}^2}{b'^2} = 1, \qquad \frac{\overline{PE}^2}{a'^2} - \frac{\overline{ME}^2}{a'^2 + b'^2} = 1.$$

Auch sie finden in einer darstellendgeometrischen Betrachtung mittelst

der Cyklographie, welche alle den Kegelschnitt berührenden Kreise zusammen fasst, ihre anschauliche Erklärung; und ebenso die Relationen, welche aus ihnen hervorgehen, wenn man die Zeichen der $\overline{PI}^2$, $\overline{PE}^2$, $\overline{PI}^2$, $\overline{PE}^2$ in die entgegengesetzten verwandelt; ich verweise jedoch für dieselbe auf den im Druck befindlichen Bd. II der 3. Aufl. meiner *Darstell. Geometrie* (§ 47).

36. Bei der *Ellipse* ist unter den Kreisen aus Punkten der Hauptaxe der aus ihrem Mittelpunkt mit dem Radius b beschriebene der grösste, welcher die Nebenaxe zur Berührungssehne hat; je weiter der Mittelpunkt nach der einen oder andern Seite vom Berührungspunkt absteht, desto kleiner werden Radius und Berührungssehne; mit dem Abstand $c^2:a$ verschwindet die letztere in der vierpunktigen Berührung, mit dem Abstand c in den Brennpunkten der Radius, während die imaginär begrenzte Berührungssehne in der zugehörigen Directrix liegt.

Unter den doppelt berührenden Kreisen aus Punkten der Nebenaxe ist der um M mit der halben Hauptaxe beschriebene, der die Hauptaxe zur Berührungssehne hat, der kleinste; von da gegen die Nebenaxenscheitel hin nimmt der Radius der doppelt berührenden Kreise bis zu dem Werthe $a^2:b$ für die in den Scheiteln selbst vierpunktig berührenden zu und die Länge der Berührungssehne bis Null ab. Diese Kreise umschliessen die Ellipse, die vorigen werden von ihr umschlossen.

Im Falle der *Hyperbel* werden die Kreise aus Punkten der Hauptaxe von der Curve umschlossen und die beiden Berührungen eines jeden gehören demselben Aste an, während die aus Punkten der Nebenaxe die Curve ausschliessen und jeden ihrer Äste einmal berühren. Die reellen doppelt berührenden Kreise aus der Hauptaxe haben ihre Mittelpunkte in den unbegrenzten Strecken ausserhalb der Brennpunkte, in diesen mit dem Radius Null und imaginärer Berührung in der zugehörigen Directrix beginnend, die reelle Berührung im Scheitel mit der Sehnenlänge Null für den Radius $c^2:a'$, und mit von da aus wachsenden Sehnen und Radien stets reell berührend. In der Nebenaxe ist jeder Punkt der Mittelpunkt eines reellen und reell doppelt berührenden Kreises, M für den mit dem kleinsten Radius a'.

Im Falle der *Parabel* sind ihre Tangenten als die im endlichen Raum liegenden Theile der doppelt berührenden Kreise aus den Punkten der Nebenaxe anzusehen, der unendlich ferne Punkt der zugehörigen Normale

als der zugehörige Mittelpunkt, die unendlich ferne Gerade der Tafel immer als der andere Theil. Die reellen Kreise aus den Punkten der Hauptaxe beginnen mit dem Radius Null für den Brennpunkt bei imaginärer Doppelberührung in der Directrix, die reelle Doppelberührung tritt ein mit der vierpunktigen im Scheitel. Und da bei der parabolischen Durchdringung die Ebene der Parabel den einen der gleichseitigen Rotationskegel des Flächenbüschels vertritt und die zu ihrer Falllinie gegen die Tafel durch die Spitze M des anderen gehende Parallele, d. h. die eine Umrisslinie des Kegels, die Mittelpunktsgerade des Büschels ist, so ist der Radius r des Potenzkreises immer diejenige Sehne in dem mit dem Radius Vector CP um den Brennpunkt beschriebenen Kreise, welche von P nach seinem Durchmesserendpunkt auf der dem Scheitel A entgegengesetzten Seite geht; für den Scheitel A selbst ist sie also eben diesem Durchmesser gleich oder gleich $2AC$.

Dass nun damit auch die Vertheilung der Mittelpunkte der rein imaginären doppelt berührenden Kreise gezeichnet ist, ist klar; ihre Radienquadrate und damit ihre Symmetriekreise erhalten wir ebenso aus den vorher entwickelten metrischen Relationen, wie construierend nach dem Früheren als die Scheitelkreise der zu den betreffenden Lagen der Tafel gehörigen centrischen zweifachen Hyperboloide.

Schluss.

37. In Bezug auf die *Allgemeinheit und Vollständigkeit* der erlangten Resultate bleibt noch Einiges hinzuzufügen, was wir anknüpfen können an die Aufgabe des § 9, von der *Construction der Kegelschnitte aus einem doppelt berührenden Kreis und drei Punkten.* Wir bemerken, dass die gegebene Lösung mit ihrer durch das Spätere erhaltenen Erweiterung auf rein imaginäre Kreise wesentlich identisch ist mit der allgemeinen projectivischen Lösung der Aufgabe: Zu einem eventuell durch sein Polarsystem vertretenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die doppelt berührenden Kegelschnitte durch drei Punkte 1, 2, 3 zu finden. Denn zur Lösung der letzteren hat man auf den Geraden 12 und 23 die dem Kegelschnitt ensprechenden Involutionen harmonischer Pole zu bestimmen und ihre zu 1, 2 resp. 2,

3 harmonisch conjugierten Paare X, X_1 und Y, Y_1 anzugeben, deren Verbindungslinien XY, X_1Y, XY_1, X_1Y_1 die vier Sehnen der Doppelberührung zwischen dem gegebenen Kegelschnitt und den gesuchten Kegelschnitten sind. Und die beiden Ähnlichkeitspunkte der Kreise, die um zwei Punkte 1, 2 orthogonal zu einem gegebenen Kreise $\mathfrak{K}$ beschrieben werden (§ 9) sind in der That dasjenige Paar in der Involution harmonischer Pole von $\mathfrak{K}$ auf der Geraden 12, welches durch 1, 2 harmonisch getrennt wird. Natürlich liefert nun die dual entsprechende Construction auch die Bestimmung der Kegelschnitte zu drei Tangenten und einem doppelt berührenden Kegelschnitt.

Verlangt man dann die *Kegelschnitte durch zwei Punkte* 1, 2, *die einen gegebenen Kegelschnitt* $\mathfrak{K}$ *doppelt berühren*, so erhellt aus der vorigen Construction, dass dieselben sich *in zwei Systeme* theilen werden. Wenn wir wieder durch X, X_1 das zu 1, 2 harmonisch conjugierte Paar der Involution harmonischer Pole von $\mathfrak{K}$ auf der Geraden 12 bezeichnen, so ist jede Gerade des Büschels um X und wieder jede Gerade des Büschels um X_1 Berührungssehne von $\mathfrak{K}$ mit einem Kegelschnitte, der den Bedingungen entspricht. Für 1 und 2 als die unendlich fernen imaginären Kreispunkte sind X, X_1 die Richtungen der Axen des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, d. h. die Berührungssehnen eines Kegelschnittes mit doppelt berührenden Kreisen laufen seinen Axen parallel.

Die der allgemeinen dual entsprechende Construction bestimmt die Kegelschnitte zu zwei Tangenten, die einen gegebenen doppelt berühren.

Wir schliessen daraus aber weiter, *dass sich diejenigen Kegelschnitte, welche zwei gegebene doppelt berühren, in drei Systeme theilen werden, welche sich auf die Ecken des gemeinsamen Tripels harmonischer Pole der gegebenen Kegelschnitte beziehen.* Unsere darstellendgeometrische Entwickelung hat in § 16 f. für den Fall zweier Kreise *ein* solches System vollkommen erläutert, und es bleibt jetzt übrig, die Kenntniss der beiden andern Systeme zu begründen. Dann wird man auch die drei Paare von Kegelschnitten construieren können, die durch einen Punkt gehen und zwei gegebene doppelt berühren; etc. Wenn man erinnert, dass durch jede Ecke des gemeinsamen Tripels harmonischer Pole von zwei Kegelschnitten zwei Verbindungslinien ihrer vier gemeinsamen Punkte gehen, und in jeder Seite desselben Tripels zwei Schnittpunkte ihrer vier gemeinsamen Tangenten liegen, welche je durch die beiden andern Ecken harmonisch ge-

trennt werden, so sieht man, dass für zwei Kreise derselben Ebene die Centrale eine Seite x und die Richtung ihrer Normalen eine Ecke X — die gegenüberliegende — des gemeinsamen Tripels ist, und erkennt, dass das in § 16 f. entwickelte System das auf X und x bezügliche Theilsystem des gesammten ist. Die Potenzlinie und die unendlich entfernte Gerade sind die beiden durch X gehenden Sehnen, die beiden Ähnlichkeitspunkte die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangentenpaare in x. Die Paare der Berührungssehnen seiner Kegelschnitte mit beiden Kreisen gehen durch X und bilden eine Involution, welche die von X ausgehenden gemeinsamen Sehnen beider Kreise zu Doppelstrahlen hat — speciell, weil der eine Doppelstrahl unendlich fern ist, eine symmetrische Involution mit dem andern Doppelstrahl als Symmetrieaxe. (§ 12.)

38. Die beiden anderen Ecken des gemeinsamen Tripels V und W liegen also in der Centrale und bilden dort das gemeinsame Paar der durch beide Kreise in ihr bestimmten Involutionen harmonischer Pole, zugleich auch das zur Potenzlinie symmetrische Paar, welches durch die Ähnlichkeitspunkte harmonisch getrennt wird; die übrigen Seiten w, v des gemeinsamen Tripels sind die Verbindungslinien von X mit V und W oder die in V und W auf der Centrale errichteten Perpendikel.

Als gemeinsames Paar der Involutionen harmonischer Pole in x, welche durch ihre Doppelpunkte resp. symmetrischen Paare A_1, B_1 und A_2, B_2 bestimmt sind — jenes für reelle, dieses für rein imaginäre Kreise — sind V und W stets reell, so lange nicht die Kreise reell sind und sich schneiden, oder die Doppelpunktstrecken A_1B_1 und A_2B_2 beider Involutionen sich trennen; in diesem Falle des § 18 sind sie imaginär. In den Fällen der ausschliessenden oder umschliessenden Berührung der Kreise fallen sie mit einander und mit B_1A_2 resp. B_1B_2 zusammen, natürlich zugleich auch v, w mit der Potenzlinie. Nach denselben Eigenschaften sind V und W auch die Grenzpunkte des Büschels der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ oder die Grundpunkte des zu ihm conjugierten Büschels, d. h. die gemeinsamen Punkte der vier Kreise, welche man aus den Schnittpunkten der gemeinsamen Tangenten mit der Potenzlinie mit je der halben Länge der bezüglichen Tangenten t_a, t_i beschreiben kann, oder des Orthogonalkreises beider gegebenen aus dem Fusspunkte der Potenzlinie in der Centrale. (Fig. 16.)

Durch diese Punkte V und W gehen die beiden Paare von imaginä-

ren gemeinsamen Sehnen der gegebenen Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, welche ihre Schnittpunkte im Endlichen mit den imaginären Kreispunkten im Unendlichen verbinden; dieselben sind die Doppelstrahlen der Involutionen von Paaren von Berührungssehnen, welche den V resp. W ebenso, wie das bisher betrachtete System X, zugeordneten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ doppelt berührenden Kegelschnitten zukommen, und diese Involutionen sind daher Involutionen rechter Winkel. Da nun von den Axen eines solchen Kegelschnittes, gleich viel ob er dem System V oder dem System W angehört, immer die eine durch den Mittelpunkt C_1 des ersten und die andere durch den Mittelpunkt C_2 des zweiten Kreises gehen muss, und dazu beide den Strahlen eines Paares der bezüglichen Involution der Berührungssehnen um V oder W parallel sein müssen, so ist der *Ort der Mittelpunkte für die Kegelschnitte der Systeme* V und W *der über der Centrale* C_1C_2 *als Durchmesser beschriebene Kreis;* und zwar ist jeder Punkt dieses Kreises der Mittelpunkt für zwei Kegelschnitte, einen des Systems V und einen des Systems W.

Sowie die Centrale als Mittelpunktsort durch die Mittelpunkte C_1, C_2 und die Ähnlichkeitspunkte I, E als Mittelpunkte der dem System X angehörigen degenerierten Kegelschnitte hindurchgeht, so auch der Mittelpunkte-Kreis der Systeme V, W. Die gemeinsamen Tangenten der Kreise zählen zum System V und zum System W wie zu dem X; die vier Schnittpunkte E_w, I_w und E_v, I_v, die sie ausser den Ähnlichkeitspunkten E und I oder E_x und I_x mit einander bilden, liegen daher auf dem aus M durch C_1 und C_2 beschriebenen Kreis, wie wir aus § 11 schon wissen. Derselbe schneidet sie aus den Geraden v resp. w heraus und zwar sind für zwei rein imaginäre Kreise alle diese vier Punkte nicht reell, für einen reellen und einen rein imaginären Kreis liegen in dem ersten zwei reelle Punkte T_{1w}, T_{2w}, während die beiden anderen imaginär sind.[1] Nach dem Schluss von § 29 ist jener Kreis im Falle gleicher Radien der Symmetriekreis des Ähnlichkeitskreises. Die zugehörigen Axen, d. h. die Halbierungslinien der von den Tangenten im Schnittpunkt jeweilig gebildeten Winkel, gehen durch C_1 und C_2 resp.; die Berührungssehnen jedes Paares an beiden Kreisen gehen durch V oder W und schneiden

[1] Es mag nebenbei angemerkt werden, dass T_{1w}, T_{2w} zugleich die Fusspunkte der Focalstrahlen für denjenigen schiefen Kreiskegel sind, der den reellen Kreis zur Spur in der Tafel und den durch den Symmetriekreis des rein imaginären Kreises cyklographisch bestimmten Punkt des Raumes zum Mittelpunkt oder zur Spitze hat.

sich dort rechtwinklig; diejenigen von zwei complementären Paaren wie E_w, I_w und wieder E_v, I_v der gemeinsamen Tangenten bilden zwei Rechtwinkelpaare in W resp. in V, die von den vier nicht complementären Paaren E_w, E_v; E_w, I_v; I_w, E_v; I_w, I_v immer ein Rechtwinkelpaar in V und eines in W. Die Geraden w und v des Tripels sind die durch V und W gehenden Verbindungsgeraden ihrer complementären Schnittpunktepaare.

Und so wie der Ort der Brennpunkte des dem unendlich fernen Pol X und der Centrale x als Polare zugeordneten Systems aus zwei Kreisen besteht, die durch die beiden Gegenecken I_x, E_x des Vierseits der gemeinsamen Tangenten der Grundkreise gehen, indem sie einander orthogonal schneiden, wesshalb dann der endliche Theil des einen in ihre Potenzlinie I_xE_x selbst übergeht, so wird der Ort der Brennpunkte des Systems mit dem Pol W und der Polare VX oder w von zwei Kreisen aus C_1 und resp. C_2 gebildet, welche einander in den Schnittpunkten E_w und I_w orthogonal durchschneiden; und der Ort der Brennpunkte des Systems mit dem Pol V und der Polare v von zwei Kreisen aus C_1, C_2, welche sich in E_v und I_v orthogonal schneiden. Es sind Kreise aus C_1, C_2, weil die Linien nach den Mittelpunkten aus ihren Schnitten, ebenso wie bei E_x, I_x die Linien E_xI_x und E_xX resp. I_xX, die Axen orthogonaler Symmetrie für die gemeinsamen Tangenten bilden müssen. (Vergl. St. 1852; p. 465.)

39. Weil diese Erweiterungen sich aus dem Vorhergehenden leicht ergeben und von Steiner in der citierten Abhandlung ausführlich angegeben, endlich in der damit verbundenen Arbeit *Allgemeine Betrachtungen über einander doppelt berührende Kegelschnitte* (Werke II. p. 471 f.) auch auf den projectivisch allgemeinen Fall doppelt berührter Kegelschnitte übertragen worden sind, so dürfen wir hier abbrechen, ohne zu übersehen, dass dieser allmählige Fortschritt zur projectivischen Allgemeinheit und die Erreichung dieser letzteren ganz im Geiste der Methode liegen.

Steiner ist auch von der Bestimmung des Kegelschnittes, der drei gegebene Kreise von einerlei Centrale doppelt berührt (Werke II. p. 461) [1], also

---

[1] Die Correctur der Steiner'schen Formeln, die offenbar schon dimensorisch falsch sind, in Bd. II, p. 740 hat falsche Zahlencoefficienten; man hat in den Nennern rechts die 2 durch 4 zu ersetzen und auch das erste Glied in der Klammer mit dem Coefficienten 4 statt 2 zu schreiben. Für d_1, d_2, d_3 als die auf die Kreispaare $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$; $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_1$; $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ respective bezüglichen Distanzsummen und mit $M_1M_2 = c_3$, $M_2M_3 = c_1$, $M_3M_1 = c_2$

in unserem Sinne der Projection der Durchdringung von drei Hyperboloiden desselben Büschels mit gegebenen Kehlkreisprojectionen weitergegangen zur Aufstellung der Lagen-Relationen, welche drei Kegelschnitte derselben Ebene erfüllen müssen, damit sie von einem vierten Kegelschnitt je doppelt berührt werden; vergleiche in der ersten Abhandlung Werke II, p. 415 f. und in der zweiten ibid. p. 481 f.

Wir müssen aber noch an eine *darstellendgeometrische Behandlungsweise* der Frage erinnern, welche Steiner in der Abhandlung von 1847 neben der planimetrischen und als sie ergänzend selbst angegeben hat. Man denke eine Kugel aus einem Punkte der Tafel als Mittelpunkt und den ihr umgeschriebenen Berührungscylinder von gegebener Richtung der Mantellinien L_x; seine Spurcurve $\mathfrak{S}$ in der Tafel ist eine Ellipse, die nach der Richtung L_x gebildete Parallelprojection desjenigen Hauptkreises der Kugel, welcher in der zu dieser Richtung normalen Diametralebene $\mathfrak{T}$ liegt. Jede durch den zur Tafel normalen Durchmesser, wir wollen sagen die Axe der Kugel, gehende Ebene schneidet die Kugel in einem Meridian-Kreis $\mathfrak{M}$, der in zwei Punkten durch die Ebene $\mathfrak{T}$ hindurchgeht, die die Endpunkte eines Durchmessers im Berührungskreise $\mathfrak{T}$ selbst sind und daher als Endpunkte eines Durchmessers von $\mathfrak{S}$ projiciert werden. Betrachten wir dann das System der zur Tafel parallelen Querschnitte oder der Parallelkreise $\mathfrak{P}$ der Kugel, so schneidet jeder den Berührungskreis

folgen aus der Identität der Durchdringungen der bezüglichen drei Paare von Hyperboloiden die Bestimmungen

$$d_1^2 = \frac{c_1}{c_2 c_3} S, \qquad d_2^2 = \frac{c_2}{c_3 c_1} S, \qquad d_3^2 = \frac{c_3}{c_1 c_2} S \quad \text{oder} \quad d_i^2 = \frac{c_i^2 S}{c_1 c_2 c_3}$$

mit

$$S \equiv c_1 c_2 c_3 + c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2.$$

Man hat daher auch immer

$$\frac{d_1^2}{c_1} + \frac{d_2^2}{c_2} + \frac{d_3^2}{c_3} = 0.$$

Die Grösse S liefert durch ihr Verschwinden die Relation der Radien und Centraldistanzen für drei Kreise desselben Büschels (der Kehlkreise als in einerlei Ebene, weil d_i gleich Null wird)

$$-1 = \frac{r_1^2}{c_2 c_3} + \frac{r_2^2}{c_3 c_1} + \frac{r_3^2}{c_1 c_2},$$

welche von vielfältigem Gebrauch ist. Die Proportionalität der c_i und d_i ist der Ausdruck für die Lage der Mittelpunkte der Flächen in einer Geraden.

des Cylinders in zwei Punkten, welche zwischen zwei Grenzlagen $\mathfrak{P}_o$ und $\mathfrak{P}_u$ der Ebene $\mathfrak{P}$ — einer obersten und einer untersten in den Abständen $r \cos\lambda$ von der Tafel für r als den Radius der Kugel und λ als den Neigungswinkel der Mantellinien des Cylinders zur Tafel oder der Ebene der Berührungscurve $\mathfrak{T}$ zu ihren Normalen — reell und verschieden sind und in diesen selbst zusammenfallen; auch schneiden sie alle jede Meridianebene $\mathfrak{M}$ in einem System paralleler Durchmesser, die ihre Endpunkte im zugehörigen Meridian haben und in unserer Projection auf der Tafel in wahrer Grösse erscheinen.

Die Projection der hiermit entsprungenen Elemente auf der Kugelfläche nach der Richtung L_x auf die Tafel (Fig. 17) giebt uns als Bild des Kreises $\mathfrak{T}$ die Ellipse $\mathfrak{E}$ mit der Projection der Axe der Kugel als Hauptaxe; die Projectionen der Parallelkreise $\mathfrak{P}$ sind ihnen gleiche Kreise aus den Bildern ihrer Mittelpunkte in der Axe als Mittelpunkten, welche die Ellipse $\mathfrak{E}$ in den Projectionen der zwei Punkte berühren, die $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{T}$ gemein hat; also reell doppelt für Parallelkreise innerhalb jener Grenzen, vierpunktig in den Hauptaxenscheiteln für die Grenzen selbst und imaginär doppelt für die von der Tafel weiter entfernten Lagen. Bis zur Distanz r haben wir Kreise von reellem bis Null abnehmendem Radius, sodass die Endpunkte des in der Axe der Kugel gelegenen Durchmessers die Brennpunkte der Ellipse $\mathfrak{E}$ liefern; darüber hinaus endlich rein imaginäre doppelt berührende Kreise, welche auch vollkommen bestimmt sind. Die Meridiane $\mathfrak{M}$ der Kugel mit einziger Ausnahme des die Richtung L_x enthaltenden, der als gerade Strecke in der Axe von $\mathfrak{E}$ erscheint, werden als ein System von Ellipsen projiciert, die man erhält, indem man die Bilder der ihnen angehörigen Systeme paralleler Durchmesser projiciert, d. h. als Orte der Endpunkte der Durchmesser von der Richtung $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ in allen Parallelkreisbildern oder in allen den doppelt berührenden Kreisen von $\mathfrak{E}$; sie berühren $\mathfrak{E}$ in den Bildern der Punkte, welche der bezügliche Meridian $\mathfrak{M}$ mit dem Berührungskreise $\mathfrak{T}$ auf der Fläche gemein hat, und diese werden nach den Regeln der darstellenden Geometrie leicht ermittelt. Sie sind die Projectionen der Endpunkte des den Ebenen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$ gemeinsamen Kugeldurchmessers nach der Richtung L_x auf die Tafel. (Fig. 17; $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$.) Es ist evident, dass alle diese Kegelschnitte die Brennpunkte von $\mathfrak{E}$ als Projectionen der Pole der Kugel zu Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers haben und paarweis symmetrisch zu ihm

liegen nach der Symmetrie der Meridiane in Paaren zu dem die Richtung L_∞ enthaltenden; man hebt damit unter ihnen die Projection des zur Richtung L_∞ normalen Meridians hervor, der zu sich selbst symmetrisch ist, die Brennpunkte von Ξ zu Scheiteln hat und Ξ in den Scheiteln der Nebenaxe berührt.

Für den interessanten Gebrauch, der sich von diesen Ergebnissen machen lässt, verweisen wir auf St. 1847; p. 406—415. Steiner hat natürlich bemerkt, dass die vorigen Betrachtungen für die Rotationsflächen zweiten Grades mit zur Tafel normalen Axen ebenso gelten, wie für die Kugel, wenn auch die Curve der Berührung zwischen Fläche und Cylinder und die Meridiane der Fläche nicht mehr Kreise sondern Ellipsen oder Hyperbeln sind; er erwähnt p. 403 der Ellipsoide und der zweifachen Rotationshyperboloide, auffallender und schwer begreiflicher Weise aber nicht der einfachen Rotationshyperboloide. Hätte er dadurch um so mehr die Aufmerksamkeit auf diese lenken wollen?

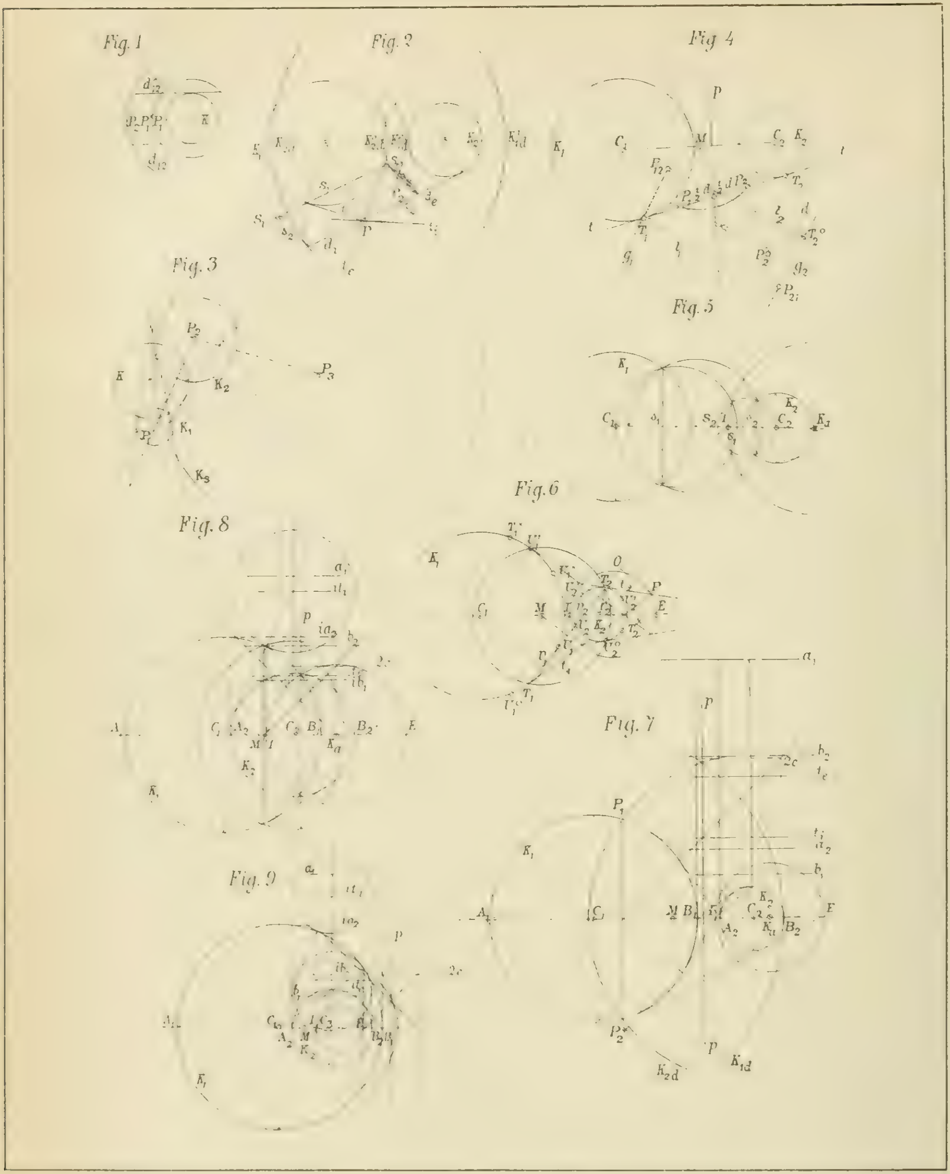
40. Gewiss kann die hier entwickelte Anschauung der zuletzt skizzierten gegenüber als umfassender und als mehr organisch bezeichnet werden; sie hat uns alle in den Abhandlungen von 1847 und 1852 niedergelegten Resultate und nicht nur einen Theil derselben geliefert, nach einheitlicher Methode bewiesen und in ein Ganzes geordnet, mit Hinzufügung einer ziemlichen Reihe von Zwischengliedern und Ergänzungen. Die Aufeinanderfolge der Resultate hat dabei erhebliche Modificationen erfahren müssen, wenn auch im Ganzen die §§ 7 bis 22 wesentlich die Arbeit von 1852 und die §§ 31 bis 35 die von 1847 reconstruieren. Natürlich fehlt bei Steiner die Parabel der Spuren der Durchdringungsebenen in der Axenebene (§ 12) und ihre Beziehung zur Scheitel- und Brennpunktsbestimmung der Durchdringungsprojection ganz, die ein wesentliches Glied in unserer Gesammtentwickelung ist. Die aus ihrer Verbindung mit der Meridianhyperbel des ruhenden Hyperboloides in den §§ 7 f. hervorgehende Curve der Kegelspitzen giebt Anlass zu einer interessanten projectivischen Curvenerzeugung aus zwei Kegelschnitten. Die Paare der Schnittpunkte des einen mit den Tangenten des andern werden mit zwei festen Punkten seiner Peripherie durch gerade Linien verbunden; die Curve ist der Ort der Punktequadrupel, in welchen diese letzteren Geraden sich schneiden.

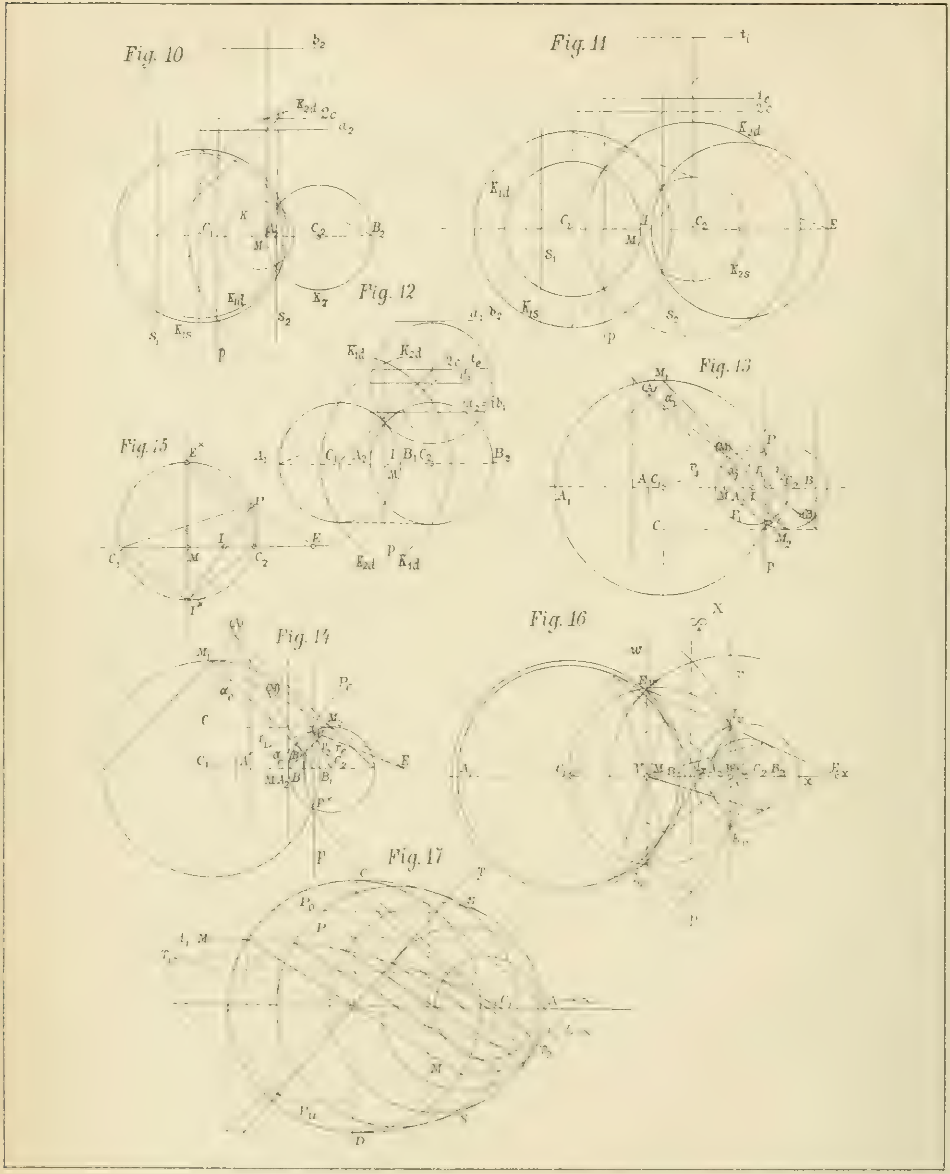
In Bezug auf die sonstige Tragweite der entwickelten Anschauung

erlaube ich mir, auf einige meiner früheren Veröffentlichungen zu verweisen. Ich habe aus ihr in der *Cyklographie* die constructive Theorie der Kreisbüschel und Kreisnetze, die Methode der reciproken Radien und die Lösungen der Probleme über den Winkelschnitt der Kreise in der Ebene, der Kugeln im Raum und der Kreise auf der Kugel entwickelt — letzteres das Programm des von STEINER 1826 als druckfertig angekündigten nun verschwundenen Manuscriptes von 25—30 Bogen; ich habe dort auch als näher ausgeführte Beispiele die Auflösung des ersten STEINER'schen Schliessungsproblems von der Figur des PAPPUS über den Ring einander berührender Kreise, welche zwei Kreise berühren (vergl. Werke I, p. 42 f., p. 59, p. 135 f.), in den §§ 167 bis 169 und die Discussion der vollständigen Figur des FEUERBACH'schen Kreises im Dreieck in §§ 178 bis 187 mit einer Menge neuer Resultate gegeben; und ich habe in der Abhandlung *Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden* in Bd. 27 der Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich Gelegenheit genommen, zu zeigen, dass jene stereometrische Behandlung der FEUERBACH'schen Figur zu den STEINER'schen Sätzen von der Hypocycloide mit drei Spitzen führt, welche im Jahre 1856 in der Akademie von Berlin und im 53 Bd. von BORCHARDT's Journal mitgetheilt sind. (Werke II, p. 641 f.) Man sieht, dass die Anwendungssphäre der Methode ziemlich ausgedehnt ist und dass sie zu manchen der resultatreichen und meist ohne Beweise gegebenen STEINER'schen Veröffentlichungen als ein Wegweiser dienen kann. Es war in diesem Gedanken, dass ich am Schlusse der Vorrede zur *Cyklographie* auch auf die beiden grossen Abhandlungen von 1847 und 1852 hinwiess.

Ich habe mich a. a. O. offen dazu bekannt, dass ich lange Zeit glaubte, meine Methode sei die des STEINER'schen Manuscriptes von 1826 (vergl. Werke I, p. 21); die Stellung der beiden genannten Abhandlungen zu meiner Methode erschien mir als ein Hauptgrund für diese Ansicht, und zwar nicht nur desshalb, weil die merkwürdigen Resultate sich so anschaulich aus derselben entwickeln liessen, sondern noch aus dem andern Grunde, dass sich bei dieser Entwickelung elementare, darstellend-geometrische, cyklographische und projectivische Methoden so eng verbunden zeigen. Mir schienen von da aus STEINER's Verhalten in der Sache und seine Äusserungen zu derselben die rechte Beleuchtung zu empfangen. Er hatte gewiss 1826 die baldige Veröffentlichung der Schrift über die Kreise

und Kugeln vor — wie er sagt, als Anfang zur Veröffentlichung seiner geometrischen Untersuchungen, die sich noch alle Tage erweiterten und ausdehnten. Er modificierte dann diese Absicht unter dem Eindruck und Zwang des fortwährenden Wachsens des eröffneten Untersuchungsgebietes und sprach sich darüber in dem classischen Vorwort zur *Systematischen Entwickelung* etc. von 1832 aus. Jenes Manuscript sollte den zweiten und letzten supplementären (vergl. Werke I, p. 235) Theil eines Gesammtwerkes bilden, welches aus fünf Haupttheilen bestehend eine projectivische Geometrie enthalten sollte; und die *Systemat. Entwickelung* ist der erste Theil davon. Das Manuscript von 1826 sollte zuletzt erscheinen, »da mehrere darin enthaltene Betrachtungen nur besondere Fälle von solchen sind, welche in den erstgenannten fünf Theilen vorkommen, und wiederum einige für Kreise und Kugeln selbständig entwickelte Sätze sich unmittelbar auf bestimmte Systeme von Curven und Flächen zweiten Grades übertragen lassen, wie solches in jenen fünf Theilen nachgewiesen wird.« Die Abhandlung von 1852 ist ein lehrreiches Beispiel dieser Verbindung und dasselbe ist durch die *Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte* (Werke II, p. 471—483) vervollständigt worden. Dass der grosse Gesammtplan von 1832 nicht zur Ausführung kommen würde, war wohl schon bei Veröffentlichung der Abhandlung von 1847 wahrscheinlich; und Steiner gab hier statt einer rein planimetrischen Entwickelung ein Beispiel von der Kraft der darstellendgeometrischen Methode in der Bemerkung Werke II, p. 402 f. und der daran anknüpfenden Ausführung ibid. p. 406 bis 415. Zudem spricht vieles dafür, dass die beiden genannten Abhandlungen Auszüge der merkwürdigsten Resultate aus einem vorliegenden grösseren Ganzen bilden, wenn schon wir über dieses Ganze keine directe Kenntniss haben. Ich habe auch die Abhängigkeit des Ähnlichkeitskreises und der von den Wechselsehnen der Kreise umhüllten Parabel ihrer Schaar (§ 15) als sehr speciellen Fall einer darstellendgeometrischen Entwickelung erkannt und nachgewiesen — vergl. die vorläufige Mittheilung in Bd. 28 der Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich p. 289 f. — und mache schliesslich noch aufmerksam auf die einfachen Übergänge vom Reellen zum Imaginären in den entwickelten Constructionen. Habe ich ihnen zu viel Credit gegeben, wenn ich für möglich hielt, dass sie in Steiner's Bewältigung des Imaginären in der Geometrie eine Stelle gehabt hätten?


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 3
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 8
Fig. 7
Fig. 9


Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17